MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

29. BAND 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 14. AUGUST 1928)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1928

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen und deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:
K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 55,
L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

29. Band. **Inhalt:** 1. Heft.

Seite

Dörnte, W., Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff 1

Jacob, M., Über die Summierbarkeit von Fourierschen Reihen und Integralen . 20

Schmidt, O., Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette 34

Krull, W., Idealtheorie mit unendlichen algebraischen Zahlkörpern 42

Ephrämowitsch, W., Zur Theorie der nicht orientierbaren Mannigfaltigkeiten . 55

Hasse, H., und A. Scholz, Zur Klassenkörpertheorie auf Takagischer Grundlage 60

Franklin, Ph., Approximation Theorems for Generalized Almost Periodic Functions 70

Lense, J., Über die Tangentialräume ametrischer Mannigfaltigkeiten 87

Thomsen, G., Über die Bewegung eines kleinen starren Probekörpers in beliebig vorgegebenen Gravitationsfeldern 96

Perron, O., Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen 129

Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff.

Von

Wilhelm Dörnte in Elberfeld.

Einleitung.

Ein System $\mathfrak{M}$ von Elementen stellt bekanntlich eine Gruppe dar, wenn für diese Elemente eine Funktion zweier Variablen $f(x, y)$, kurz $x \circ y$ oder xy derart definiert ist, daß

1. $x \circ y$ stets wieder zu $\mathfrak{M}$ gehört,
2. stets $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ ist,
3. die Gleichungen $a \circ x = b$ bzw. $x \circ a = b$ für bekanntes a und b eindeutig lösbar sind.

Entsprechend werde für $n = 1, 2, 3, \ldots$ unter einer n-Gruppe $\mathfrak{G}$ ganz allgemein ein System verstanden, für dessen Elemente eine Funktion von n Variablen $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \circ \ldots \circ x_n = x_1 \cdot x_2 \ldots \cdot x_n$ so definiert ist, daß die drei Postulate erfüllt sind:

P_1) $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n$ gehört wieder zu $\mathfrak{G}$.

P_2) Es ist stets $(x_1 \circ \ldots \circ x_n) \circ \ldots \circ x_{2n-1} = \ldots = x_1 \circ \ldots \circ x_\nu \circ (x_{\nu+1} \circ \ldots \circ x_{\nu+n}) \circ \ldots \circ x_{2n-1} = \ldots = x_1 \circ \ldots \circ x_{n-1} \circ (x_n \circ \ldots \circ x_{2n-1})$.

P_3) Durch den Wert eines „Produkts“ $x_1 \circ \ldots \circ x_n$ und $n-1$ gegebene „Faktoren“ ist der fehlende Faktor [an beliebiger Stelle] stets eindeutig bestimmt.

Die 1-Gruppen sind hiernach [da P_2 dann nichts aussagt] durch die in $\mathfrak{G}$ definierten „umfassenden getrenntwertigen“ Funktionen einer Variablen gegeben [d. h. $f(x)$ nimmt alle Werte in $\mathfrak{G}$ an und für $x \neq y$ ist $f(x) \neq f(y)$], und die 2-Gruppen sind mit den gewöhnlichen Gruppen identisch. Die meisten späteren Begriffsbildungen haben nur für $n \geqq 2$ Bedeutung.

Die vorliegenden Untersuchungen über n-Gruppen haben einerseits axiomatisches Interesse, indem sie zeigen, daß viele Sätze aus den Grundlagen der gewöhnlichen Gruppentheorie erhalten bleiben — und zwar ohne jede Beschränkung auf endliche Gruppen —, wenn die darin auftretenden Begriffe ebenfalls durch naturgemäße Verallgemeinerung gewonnen werden, während wiederum andere Sätze für $n = 2$ spezifisch sind. Es liegt also eine Art Klassifikationsprinzip der Beweismethoden vor, das darauf hinweist, möglichst allgemeine Schlußweisen zu verwenden. In diesem Sinn zeigt sich z. B. die obige Formulierung 3 für Gruppen der andern überlegen, die Einheitselement und Inverses fordert, denn n-Gruppen brauchen kein Einheitselement zu besitzen.

Andererseits haben die Untersuchungen praktische Bedeutung, da mathematische Betrachtungen öfters auf Systeme führen, die keine Gruppen im gewöhnlichen Sinne, aber verallgemeinerte Gruppen sind. So bildet in der Geometrie das System aller Spiegelungen eine 3-Gruppe in unserm Sinne, während zwei aufeinanderfolgende Spiegelungen im allgemeinen noch keine Spiegelung, sondern nur eine Drehung ergeben. Ähnlich ist es bei den Korrelationen. In der Zahlentheorie sind sämtliche Restklassen modulo k mit ihrem Zahlenvorrat einzeln als $k+1$-Gruppen aufzufassen usw.

Dieses praktische Bedürfnis hatte bereits H. Prüfer in seiner Arbeit „Theorie der Abelschen Gruppen, I. Grundeigenschaften“, Math. Zeitschr. **20** (1924), S. 165—187, besonders §§ 3—5, dazu veranlaßt, die vorliegende Aufgabe für den speziellen Fall $n = 3$ und eine weitere Nebenbedingung teilweise zu erledigen, worauf ich in § 8 zurückkommen werde. Bei der Durchführung meiner hieran anknüpfenden Untersuchung habe ich durch Frl. E. Noether wertvolle Anregung erfahren.

§ 1.

Grundlagen.

Die Begriffe endliche, unendliche, abzählbare Gruppe, Ordnung einer endlichen Gruppe, Homomorphie, Isomorphie und ähnliche lassen sich auf allgemeine n-Gruppen natürlich ohne weiteres übertragen. Eine Gruppe $\mathfrak{G}'$ heißt also homomorph mit $\mathfrak{G}$, wenn jedem Element g aus $\mathfrak{G}$ ein g' aus $\mathfrak{G}'$ zugeordnet ist, wobei jedes Element aus $\mathfrak{G}'$ von dieser Zuordnung [eventuell mehrfach] betroffen wird, und wenn aus $g_1 \dots g_n = g$ stets $g_1' \dots g_n' = g'$ folgt. Es liegt demnach auch im allgemeinen Falle nur die Einführung einer anderen Gleichheitsrelation vor. Ist obige Zuordnung eineindeutig, so geht der Homomorphismus speziell in Isomorphismus über. Die Homomorphie- und Isomorphiebeziehung sind ersichtlich wieder

reflexiv und transitiv, die Isomorphiebeziehung ist außerdem symmetrisch. Wie im gewöhnlichen Falle [d. h. für $n = 2$] wird durch die Isomorphierelation die Zurückführung der „speziellen“ auf die abstrakte Gruppentheorie erreicht. Die Isomorphismen einer Gruppe mit sich selbst heißen Automorphismen und bilden auch hier eine 2-Gruppe. Daß die Gruppenpostulate P_1, P_2 und P_3 voneinander unabhängig sind, ist durch Beispiele leicht zu zeigen.

Definition 1. Wie schon aus der Formulierung von P_2 ersichtlich ist, können „lange“ Produkte aus $m > n$ Faktoren nur für $m = n + k(n-1)$, d. h. für $m \equiv 1 \pmod{n-1}$ definiert werden, und zwar wie üblich durch vollständige Induktion.

Satz 1. *In einem Produkt von m Faktoren [$m \equiv 1$ modulo $n-1$] können an beliebiger Stelle n konsekutive Faktoren durch eine Klammer zusammengefaßt werden.*

Beweis. Auf Grund des Postulats P_2 mittels vollständiger Induktion.

Folgerung 1. Durch wiederholte Anwendung ergibt sich, daß in einem Produkt von m Faktoren an beliebiger Stelle r konsekutive Faktoren in einer Klammer zusammengefaßt oder umgekehrt aufgelöst werden dürfen, wobei m und $r \equiv 1$ modulo $n-1$ sind.

Satz 2. *Stimmen zwei Produkte in ihrem Wert und den k ersten ($k \geqq 1$) oder letzten Faktoren überein, so können diese entsprechend durch irgendwelche andere Faktoren ersetzt werden, ohne daß die Gleichheit aufhört.*

Beweis. Aus $a_1 \dots a_k x_{k+1} \dots = a_1 \dots a_k y_{k+1} \dots$ folgt durch beiderseitiges Vorsetzen der Faktorenfolge $b_1 \dots b_{k-1} \xi_k \dots \xi_m$, wobei $m \equiv 0 \pmod{n-1}$ ist und die ξ_ν so gewählt sind, daß $\xi_k \dots \xi_m a_1 \dots a_k = b_k$ ist, die Behauptung $b_1 \dots b_k x_{k+1} \dots = b_1 \dots b_k y_{k+1} \dots$. Beim Übereinstimmen der letzten Faktoren verläuft der Beweis analog. Stehen die k Faktoren im Innern der Produkte, so läßt sich nichts aussagen.

Definition 2. Das zu jedem a wohlbestimmte x, für welches das aus n Faktoren bestehende Produkt

$$a \dots a x = a$$

ist, werde mit $\bar{a}$ bezeichnet und Querelement genannt.

Satz 3. *Die Stellung von $\bar{a}$ in der Definitionsgleichung ist gleichgültig.*

Beweis. Aus $a \dots a \bar{a} = a$ folgt durch Anhängen von $n-1$ Faktoren a die Gleichung $a \dots a \bar{a} a \dots = a \dots a$. Beliebiges Einklammern von n konsekutiven Mittelfaktoren ergibt $a \dots (a \dots \bar{a} \dots a) \dots a = a \dots a$, woraus nach P_3 $a \dots \bar{a} \dots a = a$ folgt.

Satz 4. *Für jedes x gilt — die Produkte enthalten n Faktoren —*

$$xa \ldots \bar{a} \ldots a = a \ldots \bar{a} \ldots ax = x.$$

Beweis. Nach Satz 3 und Satz 2.

Satz 5. *Für $n > 2$ läßt sich die nach P_3 eindeutige Lösung der Gleichung*

$$a_1 \ldots x \ldots a_n = a$$

mit Hilfe der Querelemente explizit hinschreiben.

Beweis. In $abxc = d$ z. B. $[n = 4]$ ist $x = b\bar{b}a\bar{a}d\bar{c}c$, wie sich beim Ausrechnen nach Satz 4 ergibt. Für allgemeines n besteht x ersichtlich aus $(n-1)(n-2)+1$ Faktoren. Für $n = 2$ $[\bar{a} = e]$ wird der Beweis inhaltslos.

Folgerung 2. Auch $\overline{a_1 \ldots a_n}$ läßt sich als Produkt der a_ν und ihrer Querelemente darstellen, wozu $n(n-2)^2$ Faktoren erforderlich sind. Insbesondere ist für $n = 3$ $\overline{abc} = \bar{c}\bar{b}\bar{a}$, woraus für $n = 3$ speziell $\overline{(\bar{a})} = a$ gefolgert werden kann.

Definition 3. Die zu jedem a wohlbestimmten x_ν, für die das aus $1 + \nu(n-1)$ Faktoren bestehende Produkt $a \ldots ax_\nu = a$ ist, heißen im weitern Sinne das primäre, sekundäre usw. Querelement von a und werden mit $\overset{1}{\bar{a}}, \overset{2}{\bar{a}}, \ldots$ bezeichnet.

Anmerkung. $\overset{1}{\bar{a}}$ ist also mit $\bar{a}$ identisch. Die bisherigen Sätze lassen sich auf die höheren Querelemente übertragen.

Definition 4. Ist für die Elemente einer n-Gruppe stets

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n = a_n a_2 \ldots a_{n-1} a_1,$$

d. h. kann in jedem Falle der erste Faktor mit dem letzten vertauscht werden, so heißt die Gruppe *semi-abelsch*. Dürfen alle Faktoren beliebig permutiert werden, so heißt $\mathfrak{G}$ *abelsch*.

(Für $n = 2$ fallen diese Begriffe zusammen, verdienen aber für $n > 2$ getrennte Behandlung.)

Satz 6. *Eine n-Gruppe mit den beiden Elementen a und b ist durch Angabe einer einzigen willkürlichen Produktbeziehung $a_1 \ldots a_n = a'$, wobei die einzelnen Elemente entweder a oder b sind, stets und eindeutig festgelegt. Jede solche Gruppe ist abelsch.*

Beweis. Aus $a_1 \ldots a_n = a'$ ist der Wert jedes anderen Produkts zwangsläufig abzuleiten, d. h. es ist höchstens *eine* Gruppe möglich. Auch die Vertauschbarkeit der Faktoren ist leicht ersichtlich. Daß in jedem Falle tatsächlich eine Gruppe vorliegt, folgt aus der Gültigkeit der drei Gruppenpostulate. P_2 ist erfüllt, da der Wert eines Produkts von n Fak-

toren davon abhängt, ob die Anzahl der Faktoren a gerade oder ungerade ist.

Anmerkung. Eine n-Gruppe aus zwei Elementen ist also stets abelsch. Dagegen bilden die drei Restklassen 0, 1, 2 modulo 3 auf Grund der Kompositionsvorschrift $abc = a - b + c$ eine 3-Gruppe, die semiabelsch, aber nicht abelsch ist.

Satz 7. *Für* $n \geqq 2$ *und* $\varepsilon = \left(\cos\frac{2\pi}{n-1} + i \sin\frac{2\pi}{n-1}\right)$ *bilden die komplexen Zahlen auf Grund der Kompositionsregel*

$$a_1 \circ \ldots \circ a_n = a_1 + \varepsilon a_2 + \ldots + \varepsilon^{n-2} \cdot a_{n-1} + a_n$$

eine n*-Gruppe.*

Beweis einfach. Sonderfälle $a \circ b = a + b$ und $a \circ b \circ c = a - b + c$. Irgendeine andere $n-1$-te Einheitswurzel leistet übrigens dasselbe und umgekehrt läßt sich zeigen, daß bei einer für $\xi_\nu \neq 0$ vermöge der Festsetzung

$$a_1 \circ \ldots \circ a_n = a_1 \xi_1 + \ldots + a_n \xi_n$$

definierten n-Gruppe notwendig $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = \eta$, $\xi_3 = \eta^2$, ..., $\xi_n = \eta^{n-1} = 1$ sein muß.

§ 2.

Echte und unechte n-Gruppen.

Werden irgendwelche m Elemente $[m > n,\ m \equiv 1 \pmod{n-1}]$ einer n-Gruppe nach § 1, Definition 1 multipliziert, so bilden die Elemente der n-Gruppe vermöge dieser Komposition von je m Elementen eine m-Gruppe, da P_1, P_2, P_3 erfüllt sind. Jede n-Gruppe erzeugt also $n + k(n-1)$-Gruppen. Umgekehrt kann daher eine n-Gruppe auf diese Art aus niederen m-Gruppen $[m < n]$ erzeugt sein. Für m kommen dabei die Werte in Betracht: $m = 1 +$ Teiler von $(n-1) = 1 + \Theta_{n-1}$, wie aus der Relation $n \equiv 1 \pmod{m-1}$ gefolgert werden kann.

Definition 1. Eine n-Gruppe heißt *echt*, falls es auf keine Weise [abstrakt] möglich ist, sie auf die angegebene Art aus einer niederen m-Gruppe zu erzeugen. Andernfalls heißt sie *unecht* oder *ableitbar*.

Beispiel. Die Restklassen 1, 3, 5 modulo 6 bilden bei additiver Verknüpfung eine 3-Gruppe, aber diese ist unecht, obwohl die „unmittelbare" Summe $1 + 3 = 4$ *kein* Gruppenelement ergibt. Sie ist isomorph mit der 3-Gruppe, erzeugt durch die 2-Gruppe der additiv verknüpften Restklassen 1, 0, 2 modulo 3.

Existenzsatz 1. *Die Zahlen einer Restklasse* ϱ modulo $n-1$, *wobei* $(\varrho, n-1) = 1$ *ist, bilden bei additiver Verknüpfung eine echte (unendliche)* n*-Gruppe.*

Beweis. Die Gruppenpostulate sind erfüllt. Wäre die n-Gruppe aus einer m-Gruppe ableitbar $[n = m + x(m-1)]$, so gäbe es zu jedem a ein b $[= \bar{a}$ der m-Gruppe$]$ mit den Beziehungen [der m-Gruppe]:

$$aba \dots a = a \qquad [\text{links } m \text{ Faktoren}]$$
$$[(aba \dots a)ba \dots a] \dots \} ba \dots a = a \quad [\text{links } n = m + x(m-1) \text{ Faktoren}].$$

Nach der Kompositionsvorschrift der abgeleiteten n-Gruppe würde folgen:

$$(m-1)a + x(m-2)a + (x+1)b = a$$

oder umgeformt

$$(x+1)[a(m-2) + b] = 0,$$

d. h.

$$a(m-2) + b = 0.$$

Andererseits ist $a(m-2) + b \equiv (m-1)\varrho$ modulo $n-1$, und aus $(m-1)\varrho \equiv 0 \bmod n-1$ würde wegen $(\varrho, n-1) = 1$ folgen, daß $n-1$ ein Teiler von $m-1$ wäre, was wegen $n > m$ unmöglich ist.

Existenzsatz 2. *Die Restklassen* $1, n+1, 2n+1, \dots, (n-1)n+1$ modulo n^2 *bilden bei additiver Verknüpfung eine echte* $n+1$*-Gruppe* (*mit* n *Elementen*).

Beweis. Die drei Gruppenpostulate sind erfüllt. Wäre die $n+1$-Gruppe aus einer m-Gruppe ableitbar, so würde ähnlich wie beim vorigen Beweise folgen:

$$(m-1)a + x(m-2)a + (x+1)b = a \qquad [a \text{ und } b \text{ Restklassen}]$$
$$(m-1)a + x(m-2)a + (x+1)b \equiv a \qquad [a \text{ und } b \text{ Zahlen}]$$
$$(x+1)[a(m-2) + b] \equiv 0 \pmod{n^2}$$
$$(x+1)[a(m-2) + b] = q \cdot n^2$$
$$a(m-2) + b = q \cdot n \cdot (m-1) \qquad [\text{wegen } (x+1)(m-1) = n].$$

Insbesondere würde für $a = 1$ folgen, daß $m - 2 + b$ durch n teilbar wäre.

Aus $0 \leqq m - 2 < n - 2$ und $s \cdot n + 1 = b$ (s ganz) ergibt sich aber

$$s \cdot n + 1 \leqq m - 2 + b < (s+1)n - 1 = sn + (n-1),$$

d. h. $m - 2 + b$ kann durch n nicht teilbar sein.

Definition 2. Für $n = 1, 2, 3 \dots$ bezeichne $\psi(n)$ die kleinste Zahl, die als Ordnung einer *echten* n-Gruppe auftreten kann. [Speziell: $\psi(1) = \psi(2) = 1$, sonst $1 < \psi(n) \leqq n - 1$ nach Existenzsatz 2. $\psi(3) = 2$. $\psi(4) = 3$.]

Satz 3. *Für* $k = 1, 2, 3 \dots$ *ist* $\psi(2^k + 1) = 2$.

Beweis. Die nach § 1, Satz 6 durch $a \dots a = b$ festgelegte n-Gruppe ist *echt*, denn wäre sie aus einer niederen m-Gruppe abzuleiten

$[n = m + x(m-1)]$, so müßte wegen $m = 1 + \Theta_{n-1} = 1 + \Theta$ [Θ echter Teiler von $n-1$] und $1 + x = \frac{n-1}{\Theta} = \Theta'$ [$\Theta' > 1$, d. h. $\Theta' = 2^r$] jedenfalls x ungerade sein. Dann würde aber sowohl aus $a \ldots a = a$ als auch $a \ldots a = b$ [links m Faktoren] immer nur

$$a \ldots a) a \ldots a) \ldots) a \ldots a = a$$

hervorgehen [links n-Faktoren], d. h. die n-Gruppe ist nicht ableitbar.

Satz 4. *Für $n > 2$ und $n \neq 2^k + 1$ ist $\psi(n) > 2$.*

Beweis. Sonst gäbe es eine echte n-Gruppe mit den Elementen a und b. Es bestehen die Möglichkeiten $a \ldots a = a$ und $a \ldots a = b$. Im ersten Falle ist die n-Gruppe ableitbar aus der 2-Gruppe $aa = a$, im zweiten Falle aus der m-Gruppe $a \ldots a = b$, wobei $m = \frac{n-1}{p} + 1$ und p ein ungerader Primfaktor von $n-1$ ist, da dann

$$n = m + (p-1)(m-1)$$

und $p - 1$ gerade ist.

Satz 5. *Ist eine n-Gruppe aus einer m-Gruppe und diese aus einer k-Gruppe ableitbar, so ist die n-Gruppe aus der k-Gruppe ableitbar.*

Satz 6. *Eine echte p-Gruppe und eine echte q-Gruppe $[q \neq p]$ können dieselbe unechte n-Gruppe erzeugen.*

Satz 7. *Definiert man für die Elemente einer n-Gruppe und $m = 1 + \Theta_{n-1}$ das Produkt*

$$A_1 \circ \ldots \circ A_m = A_1(\ldots) A_2(\ldots) A_3 \ldots A_{m-1}(\ldots) A_m,$$

wo an Stelle der Klammern überall $z = \frac{n-1}{\Theta} - 1$ beliebige Elemente stets in derselben festen Reihenfolge stehen, so bilden die Elemente vermöge dieser Kompositionsregel eine m-Gruppe.

Beweis. P_1, P_2, P_3 sind erfüllt.

Satz 8. *Eine n-Gruppe ist aus einer 2-Gruppe dann und nur dann ableitbar, wenn es mindestens ein festes Element r gibt, so daß das aus n Faktoren bestehende Produkt $r \ldots r$ stets den Wert x annimmt, wenn irgendein r durch das beliebige Element x ersetzt wird.*

Beweis. In einer verallgemeinerten 2-Gruppe erfüllt das Einheitselement die Bedingung. Existiert umgekehrt ein solches r, so erzeugt die nach Satz 7 durch $a \circ b = ar \ldots rb$ definierte 2-Gruppe die n-Gruppe.

§ 3.

Nebengruppen.

Eine beliebige Untermenge [Teilmenge] einer Gruppe werde als Komplex bezeichnet. Summen und Produkte von Komplexen seien wie üblich definiert.

Definition 1. Ein Komplex $\mathfrak{N}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$, der unter Zugrundelegung der alten Kompositionsregel selbst eine Gruppe ist, heißt Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

Satz 1. *Ist $n > 2$ und $\mathfrak{M}$ ein Komplex der n-Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{M}$ Untergruppe dann und nur dann, wenn*

1. *P_1 für $\mathfrak{M}$ erfüllt ist,*
2. *mit jedem m auch irgendein Querelement $\overset{\nu}{m}$ zu $\mathfrak{M}$ gehört.*

Beweis. Nach § 1, Satz 5 und Anmerkung zu Definition 3, da P_2 von selbst erfüllt ist. Für $n = 2$ ist der Satz falsch. Jede Gruppe hat sich selbst als Untergruppe, doch braucht es weitere nicht zu geben.

Satz 2 [I. Hauptsatz]. *Ersetzt man in dem Produkt $a_1 \dots a_n$, wobei die a_ν feste Elemente der n-Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen, einen Faktor durch das variable Element x und außerdem eine Reihe anderer konsekutiver Faktoren a_ν [eventuell einen einzigen] durch die Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, so sind für verschiedene $x = x_1, x_2, \dots$ zwei solche „Nebengruppen" identisch oder elementefremd. Sie haben gleiche Mächtigkeit und erschöpfen in ihrer Gesamtheit die ganze Gruppe ($n = 2$ gewöhnlicher Fall).*

Beweis. O. B. d. A. kann die $\mathfrak{H}$-Folge links von x angenommen werden. Steht sie am Anfang, so folgt aus $h_1 \dots h_k a_{k+1} \dots a_m x a_{m+2} \dots a_n = h_1' \dots h_k' a_{k+1} \dots a_m y \cdot a_{m+2} \dots a_n$ durch beiderseitiges Vorsetzen der Faktorenfolge $h_1'' \dots h_{k-1}'' H_{k+1} \dots H_n$, wobei die H_ν so gewählt sind, daß $H_{k+1} \dots H_n h_1 \dots h_k = h_k''$ ist, nach Zusammenfassung

$$h_1'' \dots h_k'' a_{k+1} \dots a_m x a_{m+2} \dots a_n = h_1''' \dots h_k''' a_{k+1} \dots a_m y a_{m+2} \dots a_n,$$

womit wegen der Symmetrie in x und y gezeigt ist, daß zwei Nebengruppen mit *einem* gemeinsamen Element identisch sind. Steht die $\mathfrak{H}$-Folge in der Mitte, so können die vorangehenden a_ν nach § 1, Satz 2 zunächst durch H_ν und später wieder durch a_ν ersetzt werden. Daß die Nebengruppen die ganze Gruppe überdecken, ist klar. Sind H_ν fest gewählte Elemente aus $\mathfrak{H}$ und ordnet man jedem Element

$$a_1 \dots a_k h_{k+1} \dots h_l a_{l+1} \dots a_m x a_{m+2} \dots a_n$$

das Element $H_1 \dots H_k h_{k+1} \dots h_l H_{l+1} \dots H_n$ zu, so läßt sich unschwer nachweisen, daß diese Zuordnung eineindeutig ist. Die Nebengruppen haben also gleiche Mächtigkeit. — $\mathfrak{H}$ selbst braucht unter ihnen nicht aufzutreten.

Satz 3 [II. Hauptsatz]. *Ersetzt man in dem Produkt $a_1 \dots a_n$ einen Faktor durch die Variable x und auf einer [schon bewiesen] oder beiden Seiten von x eine Reihe konsekutiver Faktoren [einen oder*

mehrere] *durch die Untergruppe* $\mathfrak{H}$ *von* $\mathfrak{G}$, *so sind für verschiedene* $x = x_1, x_2 \ldots$ *zwei solche Nebengruppen identisch oder elementefremd. Sie erschöpfen die ganze Gruppe* $\mathfrak{G}$. [*Beim Auftreten von zwei „*$\mathfrak{H}$*-Blocks“ brauchen sie hingegen nicht mehr gleiche Mächtigkeit zu haben.*]

Beweis. Die Kunstgriffe des vorigen Beweises sind eventuell an beiden Enden der Produkte anzuwenden. Bilden die $\mathfrak{H}$ keine geschlossenen „Blocks“, so läßt sich die Elementefremdheit verschiedener Nebengruppen nicht mehr behaupten.

Anmerkung. Insbesondere gilt Satz 3 für die speziellen Nebengruppensysteme, bei denen außer x *alle* Faktoren durch $\mathfrak{H}$ ersetzt sind [n Typen]. In diesem Fall tritt unter den Nebengruppen stets $\mathfrak{H}$ selbst auf, doch brauchen sie nicht gleich mächtig zu sein. Für $n > 2$ können sämtliche Nebengruppen wieder Gruppen sein.

Satz 4. *Bei abelschen Gruppen gibt es nur Nebengruppen vom Typ* $x\,\mathfrak{H} \ldots \mathfrak{H}$.

Beweis. $x a_2 \ldots a_\nu \mathfrak{H} \ldots \mathfrak{H}$ ist mit $(x a_2 \ldots a_\nu H_{\nu+1} \ldots H_n) \cdot \mathfrak{H} \ldots \mathfrak{H}$ identisch, wobei die H_μ feste Elemente aus $\mathfrak{H}$ sind.

Satz 5. *Der Durchschnitt* $\mathfrak{D}$ *einer Menge von Untergruppen ist, falls von der Nullmenge verschieden, wieder eine Untergruppe.*

Beweis wie für $n = 2$.

Folgerung 1. Zu jedem Komplex $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{G}$ gibt es eine kleinste ihn umfassende Untergruppe (Hüllgruppe) $\mathfrak{H}_k$.

Satz 6. *Erzeugt eine* m*-Gruppe eine* n*-Gruppe* ($n > m$), *so brauchen Untergruppen der* n*-Gruppe keine Untergruppen der* m*-Gruppe zu sein.* (*Im umgekehrten Fall natürlich stets.*)

Satz 7. *Untergruppen einer echten Gruppe können echt oder ableitbar sein. Untergruppen einer ableitbaren Gruppe können ebenfalls echt oder ableitbar sein.*

Beweis. Insbesondere mit Restklassen und den Kompositionsregeln $abc = a - b + c$ oder $abc = a + b + c$ lassen sich unschwer Beispiele bilden.

§ 4.

Potenzen.

Definition 1. Für $z \equiv 1 \pmod{n-1}$ bedeute a^z

1. für $z > 0$ das Produkt aus z Faktoren a,

2. für $z \leqq 0$ das aus $Xa \ldots a = a$ wohlbestimmte X, wobei links $-z+1$ Faktoren a stehen.

Satz 1. *Es ist* $a^{z+(n-1)} = a^z \cdot a \ldots a$ (n *Faktoren*).

Satz 2. *Es ist* $a^z \cdot a \ldots a = a \ldots a a^z$ (n *Faktoren*).

Beweis. Durch Faktorenanzahlbestimmung unter Zurückgreifen auf die Definition.

Satz 3. *Es ist* $a^{z_1} \cdot a^{z_2} \ldots a^{z_n} = a^{z_1+\ldots+z_n}$ $[z_\nu \equiv 1 \pmod{n-1}]$.

Beweis. Für die Konstellation $z_1 = \ldots = z_n = 1$ ist der Satz richtig. Unter Benutzung von Satz 1 und Satz 2 ergibt sich, daß jeder Exponent um $\pm(n-1)$ abgeändert werden kann, wodurch sich jede Konstellation erreichen läßt.

Satz 4. *Es ist stets* $(a^{c_1})^{c_2} = a^{c_1 \cdot c_2}$ $[c_\nu \equiv 1 \pmod{n-1}]$.

Beweis. Für $c_\nu > 0$ ist der Satz klar. Ist allein $c_2 < 0$, so folgt, wenn $(a^{c_1})^{c_2} = X$ und $a^{c_1 \cdot c_2} = Y$ gesetzt wird, unter Zurückgreifen auf die Definition und Anhängen von $c_1(-c_2)+1$ Faktoren a nach P_3 die Gleichheit von X und Y. Im dritten und vierten Fall ist auf die Verschiebbarkeit des Querelements $a^{c_1} = X$ zurückzugreifen.

Satz 5. *Die Potenzen von a bilden eine abelsche Gruppe, die mit der Hüllgruppe von a identisch ist.*

Beweis einfach.

Anmerkung. Bei zyklischer Wiederholung heißt der Modul aller ganzen Zahlen z, für die $a^{1+z(n-1)} = a$ ist, die Ordnung von a. Sind alle Potenzen verschieden, so ist demnach die Ordnung 0. Elemente der Ordnung 1 heißen Einheitselemente. Alle Elemente einer Gruppe können Einheitselemente sein; ebenso ist es möglich, daß gar keine vorhanden sind.

Satz 6. *Hat* $\mathfrak{G}$ *die Ordnung g, so ist für jedes a aus* $\mathfrak{G}$ $a^{1+g(n-1)} = a$.

Beweis. Ist z die Ordnung von a, so ist $a^{1+z(n-1)} = a$, und z ist ein Teiler von g.

Satz 7. *Hat a die positive Ordnung z, so ist die Ordnung des Querelements* $\bar{a}$ *ein Teiler von z.*

Beweis. Aus $a^{1+z(n-1)} = a$ oder $a^{1+(z-1)(n-1)} \cdot a \ldots a = a$ folgt $a^{1+(z-1)(n-1)} = \bar{a}$ und hieraus durch Potenzieren mir $1+z(n-1)$ schließlich $\bar{a}^{1+z(n-1)} = \bar{a}$.

Satz 8. *Hat* $\bar{a}$ *die positive Ordnung z, so ist die Ordnung von a ein Teiler von* $z(n-2)$.

Beweis. Aus $\bar{a}^{1+z(n-1)} = \bar{a}$ entsteht durch beiderseitiges Vorsetzen von $(n-1)[1+z(n-2)]$ Faktoren a rechts $a^{1+z(n-2)(n-1)}$ und links einfach a. — Die obere Grenze $z(n-2)$ kann erreicht werden. Für $n = 3$ haben a und $\bar{a}$ gleiche Ordnung.

§ 5.

Normalteiler und Seminormalteiler I.

Definition 1. Eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ heißt *invariante* Untergruppe oder *Normalteiler* von $\mathfrak{G}$, falls für jedes x aus $\mathfrak{G}$ $x\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H} = \ldots = \mathfrak{H}\ldots x\ldots\mathfrak{H} = \ldots = \mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}x$ ist. $\mathfrak{H}$ heißt *Seminormalteiler* von $\mathfrak{G}$, falls stets $x\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}x$ ist.

(Abkürzung: NT, SNT. Jeder NT ist SNT, aber nicht umgekehrt.)

Satz 1. *Ist $\mathfrak{H}$ SNT der Gruppe $\mathfrak{G}$, so bilden die Nebengruppen $x\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{H}$ bei multiplikativer Verknüpfung eine n-Gruppe; natürlich erst recht bei einem NT.*

Beweis. Es ist $(x_1\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H})\cdot(x_2\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H})\ldots(x_n\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}) = (x_1\ldots x_n)\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}$ auf Grund der Definition des SNT. P_1 ist also erfüllt, und für P_3 existiert mindestens eine Lösung. Deren Eindeutigkeit folgt unter Verwendung von § 1, Satz 2. P_2 ist von selbst erfüllt.

Definition 2. Die Gruppe der Nebengruppen $x\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}$ eines SNT $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ heißt Faktor- oder Quotientengruppe von $\mathfrak{H}$ und wird mit $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ bezeichnet.

Satz 2. *$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ ist homomorph mit $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Zuordnung $g \sim g\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}$.

Satz 3. *Wenn das Produkt von n beliebigen Nebengruppen $x\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}$ der Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ stets wieder eine solche ergibt, ist $\mathfrak{H}$ Seminormalteiler [nicht notwendig NT!] von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Wegen $h\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ ist insbesondere für jedes x $\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}\cdot(x\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}) = (y\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H})$, also wegen $\bar{h}h\ldots hz = z$ [z beliebig] $x\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}$ in $y\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}$ enthalten, d. h. $x\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H} = y\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}$. Aus $\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}(x\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}) = x\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}$ folgt ähnlich, daß $\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}x$ in $x\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}$ enthalten, also damit identisch ist.

Satz 4. *Der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ von Seminormalteilern ist, falls vorhanden, wieder ein SNT von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Sind $\mathfrak{H}_\nu$ symbolisch die verschiedenen SNT, h_ν deren Elemente und d die Elemente von $\mathfrak{D}$, und bedeutet $(-r-)$ eine Folge von Faktoren r_μ, so folgt aus $\mathfrak{H}_\nu\ldots\mathfrak{H}_\nu x = x\mathfrak{H}_\nu\ldots\mathfrak{H}_\nu$ und

$$(-d-)\cdot x = x\cdot(-h_\nu-) = x\cdot(-d'-)h_\nu = x\cdot(-d'-)\cdot d$$

[vgl. § 1, Satz 2], daß $\mathfrak{D}\ldots\mathfrak{D}x$ in $x\mathfrak{D}\ldots\mathfrak{D}$ enthalten, also damit identisch ist.

Satz 5. *Der Durchschnitt von NT ist, falls vorhanden, wieder ein NT.*

Beweis. Es folgt analog Satz 4, daß $\mathfrak{D} \ldots x \ldots \mathfrak{D}$ in $\mathfrak{D} \ldots \mathfrak{D} x$ enthalten ist.

Anmerkung. Für $n = 2$ fallen NT und SNT zusammen. Die folgenden Sätze betonen die Unterschiede.

Satz 6. *Ist* $\mu \equiv 1 \pmod{n-1}$ *und sind* $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\mu$ *NT von* $\mathfrak{G}$, *so sind die Faktoren des Produkts* $\mathfrak{N}_1 \ldots \mathfrak{N}_\mu$ *beliebig vertauschbar.*

Beweis. Durch Auflösen eines $\mathfrak{N}_\mu$ in das Produkt $\mathfrak{N}_\mu \ldots \mathfrak{N}_\mu$ usw.

Satz 7. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 6 *ist* $\mathfrak{N}_1 \ldots \mathfrak{N}_\mu$ *ein NT von* $\mathfrak{G}$.

Beweis. Nach Satz 6 ist P_1 erfüllt. Ferner folgt daraus, daß mit jedem x auch $\bar{x}$ in $\mathfrak{N}_1 \ldots \mathfrak{N}_\mu$ enthalten ist. Die NT-Eigenschaft ist schon in Satz 6 bewiesen. [Der Fall $n = 2$ ist bekannt.]

Satz 8. *Die Hüllgruppe von NT ist wieder ein NT.*

Beweis. Die Hüllgruppe ist gegeben durch die Gesamtheit aller Elemente in irgendwelchen Produkten $\mathfrak{N}_{(1)} \ldots \mathfrak{N}_{(\mu)}$. Daß es sich dabei um einen NT handelt, folgt nach Satz 6.

Anmerkung. Für *Seminormalteiler* gelten die drei letzten Sätze *nicht*, auch nicht im spezielleren Sinne.

Beispiel. Elemente von $\mathfrak{G}$ seien beliebige endliche Folgen aus den Zeichen a, b, c, wobei aber niemals zwei gleiche Zeichen nebeneinander stehen, und die leere Nullfolge. Es liegt eine 3-Gruppe vor auf Grund der Kompositionsregel: aa, bb und cc sind in der Folge der aneinandergereihten Elemente so oft wie möglich wegzustreichen. a und b sind SNT dieser Gruppe, dagegen ist ihre Hüllgruppe $\{a, b\}$ *kein* SNT, denn es ist z. B.

$$\{a, b\} \cdot \{a, b\} \cdot c \neq c \cdot \{a, b\} \cdot \{a, b\} .$$

§ 6.

Normalteiler und Seminormalteiler II.

Satz 1. *In einem Produkt von* n *Nebengruppen* $\mathfrak{S} \ldots \mathfrak{S} x$ *eines SNT* $\mathfrak{S}$ *der* n*-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *können bis zu* $n-1$ *Faktoren durch ein einzelnes Element der betreffenden Nebengruppe ersetzt werden.*

Beweis einfach.

Satz 2. *Eine Untergruppe* $\mathfrak{V}$ *der Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ *eines SNT* $\mathfrak{S}$ *von* $\mathfrak{G}$ *besteht aus Nebengruppen, deren Elemente in ihrer Gesamtheit eine Untergruppe* $\mathfrak{V}$ *von* $\mathfrak{G}$ *darstellen.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, daß P_1 für $\mathfrak{V}$ erfüllt ist. Ist ferner x in $\mathfrak{V}$ enthalten, so gibt es eine Nebengruppe $\mathfrak{H} \ldots \mathfrak{H} y$, so

daß $(\mathfrak{H} \dots \mathfrak{H} y) \cdot (\mathfrak{H} \dots \mathfrak{H} x) \dots (\mathfrak{H} \dots \mathfrak{H} x) = (\mathfrak{H} \dots \mathfrak{H} x)$, also insbesondere $yx \dots x = h_1 \dots h_{n-1} x$ und hieraus $\bar{x} = h_1' \dots h_{n-1}' y$ ist. $\bar{x}$ ist also in $\mathfrak{V}$ enthalten, womit für $n > 2$ alles bewiesen ist.

Satz 3. *Jede Untergruppe $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{G}$, die einen SNT $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ enthält, läßt sich aus Nebengruppen von $\mathfrak{S}$ zusammensetzen, die eine Untergruppe $\mathfrak{V}/\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{V}}$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ bilden.*

Beweis. $\mathfrak{S}$ ist SNT von $\mathfrak{G}$, also von $\mathfrak{V}$. Ist deshalb $\mathfrak{V} = \mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1, \dots$, so bilden diese Nebengruppen eine Gruppe, die infolgedessen eine Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ darstellt.

Satz 4. *Jeder SNT [NT] $\overline{\mathfrak{V}}$ der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ eines Seminormalteilers $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ liefert [in Elemente aufgelöst] einen SNT [NT] $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{G}$; jeder SNT [NT] $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{G}$, der $\mathfrak{S}$ enthält, kann umgekehrt erzeugt werden durch Auflösen eines SNT [NT] $\overline{\mathfrak{V}}$ der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ in seine Elemente.*

Beweis. Die SNT-Eigenschaft bzw. NT-Eigenschaft der einzelnen Untergruppen [vgl. Satz 2 und Satz 3] folgt in jedem einzelnen Fall daraus, daß diese einmal elementweise, dann aber auch als Mengen von Komplexen [Nebengruppen] zu multiplizieren sind. Satz 1 ermöglicht den Übergang von x zu $\mathfrak{S} \dots \mathfrak{S} x$ und umgekehrt.

Satz 5. Sind $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{K}$ *zwei Untergruppen von* $\mathfrak{G}$ *und ist für jedes* K *aus* $\mathfrak{K}$

a) $\quad K\mathfrak{H} \dots \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \dots \mathfrak{H} K,$

b) $\quad \mathfrak{H} \dots K \dots \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \dots \mathfrak{H} K \quad$ [*Stellung von* K *beliebig*],

ist ferner $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{H}, \mathfrak{K}\}$ *die Hüllgruppe und* $\mathfrak{D}$ *der Durchschnitt von* $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{K}$, *so ist* $\mathfrak{H}$ *SNT* [b) *NT*] *von* $\mathfrak{L}$ *und* $\mathfrak{D}$ *SNT* [b) *NT*] *von* $\mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$ *isomorph mit* $\mathfrak{K}/\mathfrak{D}$.

Beweis. Der Fall a) wird mit b) mitbewiesen. Es ist

$$\mathfrak{H} \cdot (\mathfrak{H} \dots K \dots \mathfrak{H}) K \dots K\overline{K} = \mathfrak{H}$$

nach Voraussetzung und

$$\mathfrak{K} \cdot (\mathfrak{K} \dots K \dots \mathfrak{K}) K \dots K\overline{K} = \mathfrak{K}, \qquad \text{also} \qquad \mathfrak{D} \cdot (\mathfrak{D} \dots K \dots \mathfrak{D}) K \dots K\overline{K}$$

für jedes K in $\mathfrak{D}$ enthalten. Durch einfache Umformung folgt $\mathfrak{D} \dots K \dots \mathfrak{D} = \mathfrak{D} \dots \mathfrak{D} K$, d. h. $\mathfrak{D}$ ist NT [SNT] von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K} = \mathfrak{D} + \mathfrak{D} \dots \mathfrak{D} K_2 + \dots$. $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{H}, \mathfrak{K}\}$ ist auf Grund der Voraussetzung mit $\mathfrak{H} \dots \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ identisch, also

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \dots \mathfrak{H} [\mathfrak{D} + \mathfrak{D} \dots \mathfrak{D} K_2 + \dots] = \mathfrak{H} + \mathfrak{H} \dots \mathfrak{H} K_2 + \dots .$$

Da ferner [wie einfachste Rechnung zeigt] $\mathfrak{H}$ NT (SNT) von $\mathfrak{L}$ ist, bilden obige Nebengruppen, die sämtlich verschieden sind, die Faktorgruppe $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$.

Schließlich folgt aus

$$(\mathfrak{D} \dots \mathfrak{D} K_a) \dots (\mathfrak{D} \dots \mathfrak{D} K_b) = (\mathfrak{D} \dots \mathfrak{D} K_c)$$

wegen $K_a \dots K_b = K_c$

$$(\mathfrak{H} \dots \mathfrak{H} K_a) \dots (\mathfrak{H} \dots \mathfrak{H} K_b) = (\mathfrak{H} \dots \mathfrak{H} K_c),$$

d. h. $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$ ist isomorph mit $\mathfrak{K}/\mathfrak{D}$.

Satz 6. *Ist $\mathfrak{H}$ SNT [NT] von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{K}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ [sei vorhanden!] von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ ein SNT [NT] von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}/\mathfrak{D}$ ist isomorph mit einer Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.*

Beweis. Nach Satz 5 ist $\mathfrak{K}/\mathfrak{D}$ isomorph mit $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$, und $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.

Definition 1. Der Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ heißt größter NT oder Maximalnormalteiler von $\mathfrak{G}$, wenn er in keinem echten NT von $\mathfrak{G}$ echt enthalten ist.

Satz 7. *Sind $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ zwei verschiedene Max.NT von $\mathfrak{G}$ und ist ihr Durchschnitt $\mathfrak{D}$ vorhanden, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$ isomorph mit $\mathfrak{N}_2/\mathfrak{D}$, und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_2$ entsprechend mit $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{D}$.*

Beweis. Nach Satz 5 ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{N}_1$ isomorph mit $\mathfrak{N}_2/\mathfrak{D}$, und nach Definition 1 muß $\mathfrak{L}$ gleich $\mathfrak{G}$ sein, da $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ darin enthalten ist.

Satz 8. *Es sei $\mathfrak{G}'$ homomorph mit $\mathfrak{G}$ und E ein Einheitselement von $\mathfrak{G}'$. Γ sei die Menge aller g in $\mathfrak{G}$, denen E zugeordnet ist. Dann ist Γ SNT von $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{G}'$ ist isomorph mit $\mathfrak{G}/\Gamma$.*

Beweis. Für Γ sind P_1 und P_3 erfüllt. Entspricht dem beliebigen Element g aus $\mathfrak{G}$ das Element g', so folgt, daß alle andern Elemente, denen g' entspricht, in $\Gamma \dots \Gamma g$ enthalten sind. Aus diesem Grunde ist der ganze Komplex $g\Gamma \dots \Gamma$ in $\Gamma \dots \Gamma g$ enthalten, d. h. damit identisch. Ist ferner $\mathfrak{G} = \Gamma \dots \Gamma x + \Gamma \dots \Gamma y + \dots = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots$, so ist die Zuordnung $\Gamma \dots \Gamma x \sim x'$ eineindeutig und genügt der Homomorphiebedingung.

§ 7.

Semiabelsche Gruppen.

Satz 1. *Ist die n-Gruppe $\mathfrak{G}$ semiabelsch und $z \equiv 1 \pmod{n-1}$, so ist stets*

$$a_1^1 \dots a_z^1 a_1^2 \dots a_z^2 \dots a_1^n \dots a_z^n$$
$$= a_1^1 a_1^2 \dots a_1^n a_2^1 \dots a_2^n \dots a_z^1 \dots a_z^n .$$

Beweis. Wird unter dem Index eines Faktors a_ν des Produkts $a_1 \dots a_\mu$ der Rest der Stellenzahl ν modulo $n-1$ verstanden, so gilt:

1. Elemente, deren Stellenzahl sich um $n-1$ unterscheidet, können vertauscht werden, da $\mathfrak{G}$ semiabelsch ist.

2. Elemente von gleichem Index können vertauscht werden.

3. Das Element a_μ^ν hat auf der linken Seite der obigen Behauptung denselben Index wie auf der rechten Seite, da die Indexdifferenz $z(\nu-1)+\mu-n(\mu-1)-\nu$ wegen $z=1+k(n-1)$ kongruent 0 modulo $n-1$ ist.

Satz 2. *Ist $\mathfrak{G}$ semiabelsch, so ist das Produkt von n Untergruppen wieder eine Untergruppe.*

Beweis. Es ist $h_1^1 \dots h_n^1 \dots h_1^n \dots h_n^n = h_1^1 \dots h_1^n \dots h_n^1 \dots h_n^n = H_1 \dots H_n$ und $(\bar{h}_1 \dots \bar{h}_n)(h_1 \dots h_n) \dots (h_1 \dots h_n) = (\bar{h}_1 \dots h_1) \dots (\bar{h}_n \dots h_n) = h_1 \dots h_n$, d. h. $\overline{h_1 \dots h_n} = \bar{h}_1 \dots \bar{h}_n$, womit für $n>2$ alles bewiesen ist.

Satz 3. *In semiabelschen Gruppen bilden die Elemente (endlicher) positiver Ordnung eine Untergruppe.*

Beweis. Es sei für $\nu = 1 \dots n$ $a_\nu^{1+x_\nu(n-1)} = a_\nu$, und m das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der x_ν. Dann ist nach Satz 1 $(a_1 \dots a_n)^{1+m(n-1)} = a_1^{1+m(n-1)} \dots a_n^{1+m(n-1)} = a_1 \dots a_n$. Ferner hat mit x auch $\bar{x}$ endliche positive Ordnung. [Vgl. § 4, Satz 7.]

Satz 4. *In semiabelschen Gruppen bilden diejenigen Elemente, deren Ordnung ein Teiler der natürlichen Zahl m ist, eine Untergruppe.*

Beweis analog.

Folgerung. Die Einheitselemente einer semiabelschen Gruppe bilden, falls vorhanden, eine Untergruppe.

Satz 5. *In semiabelschen Gruppen bilden die primären, sekundären ... Querelemente je eine Untergruppe.*

Beweis. Aus $a_\nu \dots a_\nu \overset{m}{\bar{a}}_\nu = a_\nu$ folgt nach Satz 1

$$(a_1 \dots a_n) \dots (a_1 \dots a_n)(\overset{m}{\bar{a}}_1 \dots \overset{m}{\bar{a}}_n) = a_1 \dots a_n,$$

d. h. $\overset{m}{\bar{a}}_1 \dots \overset{m}{\bar{a}}_n$ ist wieder ein Querelement m-ter Stufe. Mit jedem a gehört nach Definition auch $\overset{m}{\bar{a}}$ zur Gesamtheit der Querelemente m-ter Stufe.

Satz 6. *Ist $\mathfrak{G}$ semiabelsch und haben die Elemente $a_1, \dots, a_{n-1}$ die Ordnung 1, so stellt die Abbildung $x \sim a_1 \dots a_\nu x a_{\nu+1} \dots a_{n-1}$ in $\mathfrak{G}$ einen Automorphismus her.*

Beweis. Aus $g_1 \dots g_n = g$ folgt nach Satz 1

$$(a_1 \dots a_\nu g_1 a_{\nu+1} \dots a_{n-1}) \dots (a_1 \dots a_\nu g_n a_{\nu+1} \dots a_{n-1})$$
$$= a_1 \dots a_\nu (g_1 \dots g_n) a_{\nu+1} \dots a_{n-1} = a_1 \dots a_\nu g a_{\nu+1} \dots a_{n-1}.$$

Anmerkung. Für $n>2$ kommen also schon den semiabelschen Gruppen viele der Eigenschaften zu, die von den abelschen 2-Gruppen

her geläufig sind. Die Theorie der Charaktere hingegen stützt sich am besten auf abelsche Gruppen. In ähnlicher Weise lassen sich die Sätze über Gruppenzentrum und direkte Produkte verallgemeinern, doch sind die Untersuchungen hierüber noch nicht abgeschlossen.

§ 8.

Die Prüferschen Scharen und ihre Stellung in der allgemeinen Theorie.

H. Prüfer betrachtet in seiner in der Einleitung zitierten Arbeit Systeme von Elementen $a, b, c \ldots$ mit den Eigenschaften:

E_1) Je drei Elementen in bestimmter Reihenfolge ist ein viertes eindeutig zugeordnet. In Formeln: $abc = d$. [Prüfer schreibt der späteren Anwendung halber $AB^{-1}C = D$.]

E_2) Es ist stets $abb = a$.

E_3) Es ist stets $abc = cba$.

E_4) Es ist stets $(abc)de = ab(cde)$.

Solche Systeme nennt er Scharen.

Folgerung 1. Für die Elemente einer Schar gilt stets $bba = a$, wie aus E_2 und E_3 folgt.

Satz 1. *Prüfers Scharen sind dasselbe wie semiabelsche 3-Gruppen mit lauter Einheitselementen.*

Beweis. I. 3-Gruppen mit diesen beiden Nebenbedingungen erfüllen E_1, E_2, E_3 und E_4.

II. α) Für Prüfers Scharen ist mit E_1 auch P_1 erfüllt.

β) Es ist

$$(abc)de = [\{a(bcd)(bcd)\}bc]de = [a(bcd)\{(bcd)bc\}]de$$
$$= [a(bcd)\{(dcb)bc\}]de = [a(bcd)\{dc(bbc)\}]de = [a(bcd)\{dcc\}]de$$
$$= [a(bcd)d]de = a(bcd)[dde] = a(bcd)e,$$

d. h. für Prüfers Scharen ist P_2 allgemein erfüllt.

γ) Wegen E_3 braucht nur gezeigt zu werden, daß die Gleichungen $xab = c$ bzw. $axb = c$ für x eindeutig lösbar sind. Lösungen sind ersichtlich (cba) bzw. (acb). Eindeutigkeit besteht auf Grund der Rechnung:

$$xab = yab \qquad \text{bzw.} \qquad axb = ayb$$
$$(xab)ba = (yab)ba \qquad a(axb)b = a(ayb)b$$
$$xa(bba) = ya(bba) \qquad (aax)bb = (aay)bb$$
$$xaa = yaa \qquad aax = aay$$
$$x = y \qquad x = y.$$

Erklärung. Das allgemeine Analogon zu Prüfers Scharen sind also n-Gruppen, die 1. semiabelsch sind, 2. nur Einheitselemente enthalten.

Anmerkung. Für $n = 3$ ist 1. in 2. enthalten, denn dann ist

$$abc = (abc)aa = (abc)[abb]a = (abc)[ab(cbb)]a$$
$$= (abc)[(abc)cb]a = (abc)(abc)[cba] = cba.$$

In kürzester Fassung sind Prüfers Scharen also identisch mit 3-Gruppen von lauter Einheitselementen.

Daß „lange" Produkte nur für $\mu \equiv 1 \pmod{n-1}$ definiert sind, kommt für $n = 3$ bei Prüfer wegen der Schreibweise $AB^{-1}C$ in der Form $\sum \exp = 1$ zum Ausdruck. Ober- und Unterscharen entsprechen unsern Ober- und Untergruppen, womit der Anschluß an die Prüferschen Sätze über den Durchschnitt von Scharen und Vereinigungsscharen gegeben ist. Auf S. 170 betrachtet Prüfer Produkte von Unterscharen, die für ungerade Faktorenanzahl im Sinne der Komplexmultiplikation definiert sind. Da Scharen semiabelsch sind, stellt das Produkt hier eine Schar dar. [Vgl. § 7, Satz 2.] Die Sätze $F = aaF = abF = aFF = FaF = FFF$ [S. 170 unten] folgen aus $aaa = a$ und der Definition der Unterschar. Auf S. 171 oben spricht Prüfer einen Satz aus, der allgemein so lautet:

Satz 2. *Zwei Untergruppen* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{H}$ *der beliebigen* n*-Gruppe* $\mathfrak{G}$ *haben dann und nur dann gemeinsame Elemente, wenn die Komplexe* $\mathfrak{F} \ldots \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \ldots \mathfrak{H}$ [n *Faktoren*] *identisch sind.*

Beweis. In $\mathfrak{F} \ldots \mathfrak{F}\mathfrak{H} \ldots \mathfrak{H}$ muß jeweils das letzte $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{F} \ldots \mathfrak{F}$ und das erste $\mathfrak{H}$ durch $D\mathfrak{H} \ldots \mathfrak{H}$ ersetzt werden, wobei D das gemeinsame Element bezeichnet. Umgekehrt folgt aus $f_1 \ldots f_{n-1} h_m = f_m h_2 \ldots h_n$ wie üblich $h_m h_2' \ldots h_n' = f_1' \ldots f_{n-1}' f_m$, d. h. $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{H}$ sind nicht elementefremd.

Anmerkung. In der Prüferschen Form $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \ldots \mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{F} \ldots \mathfrak{F}$ würde der Satz allgemein nicht gelten, während für Scharen $\mathfrak{F}\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{F}\mathfrak{F}$ ist. Die obigen Komplexe sind nur im speziellen Falle Gruppen.

In § 4, S. 171/172 definiert Prüfer: Die Schar $\mathfrak{G}$ heißt Nebenschar von $\mathfrak{F}$ [beides Unterscharen von $\mathfrak{H}$], falls $\mathfrak{F}\mathfrak{F}\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$ ist. — Reflexivität, Symmetrie und Transitivität ist leicht ersichtlich, weshalb Prüfer $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ sogleich Nebenscharen voneinander nennt.

Wie Beispiele zeigen, ist dieser Prüfersche Nebengruppenbegriff für allgemeine n-Gruppen in der Regel nicht verwendbar, deckt sich jedoch für den Sonderfall der semiabelschen n-Gruppen mit lauter Einheitselementen auf Grund des folgenden Satzes mit dem Nebengruppentypus $\mathfrak{H} \ldots \mathfrak{H}x$ [vgl. § 3 und § 5], so daß die Nebenscharen von $\mathfrak{F}$ auch durch $\mathfrak{F}\mathfrak{F}x = x\mathfrak{F}\mathfrak{F}$ gegeben sind.

Satz 3. *Die semiabelsche n-Gruppe $\mathfrak{G}$ enthalte lauter Einheitselemente. Ist für die Untergruppen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{H}$ (n Faktoren) $\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{F}\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}=\mathfrak{F}$, so ist $\mathfrak{H}$ in der Form $\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}x$ darstellbar, und umgekehrt erfüllt jedes $\mathfrak{H}=\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}x$ die obigen Bedingungen, ist also insbesondere eine Gruppe.*

Beweis. 1. Es ist

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}(\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H})=\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}\mathfrak{F}(\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}h)$$
$$=\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}(\mathfrak{F}\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H})h=\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}\mathfrak{F}h=\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}x \quad (h \text{ beliebig in } \mathfrak{H}).$$

2. Es ist

$$\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}(\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}x)=\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}x$$

und ferner

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}x)\ldots(\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}x)=\mathfrak{F}x\ldots x=\mathfrak{F}$$

wegen $x\ldots x=x$ [§ 1, Satz 2].

3. $\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}x$ ist eine Gruppe, da $(\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}x)\ldots(\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}x)=(\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}x)$ und ferner stets $\bar{a}=a$ ist.

Satz 4. *Ist $\mathfrak{F}$ eine Untergruppe und sind $a_2,\ldots,a_n$ Elemente der beliebigen n-Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{F}a_2\ldots a_n$ Nebengruppe von $\mathfrak{F}$, und jede Nebengruppe von $\mathfrak{F}$ vom Typus $\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}x$ läßt sich umgekehrt in dieser Form darstellen.*

Beweis. 1. $\mathfrak{F}a_2\ldots a_n=(\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F})a_2\ldots a_n=(\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}f)a_2\ldots a_n$
$=\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}(fa_2\ldots a_n)$.

2. $\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}\mathfrak{F}x=\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}(\mathfrak{F}\mathfrak{F}f\ldots f)x=(\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}\mathfrak{F}\mathfrak{F})f\ldots fx=\mathfrak{F}f\ldots fx$
[f beliebig in $\mathfrak{F}$].

Für $n=3$ und die Scharennebenbedingung beweist Prüfer diesen Satz im Abschnitt 1, § 4. Satz 4 gilt nur für die speziellen Nebengruppen $\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}x$.

In Abschnitt 3, § 4 behauptet Prüfer:

Ersetzt man in einem Produkt von Scharen jeden Faktor durch eine seiner Nebenscharen, so ist das neue Produkt eine Nebenschar des alten.

Dies gilt für beliebiges n, falls die Prüferschen Nebenbedingungen erfüllt sind. Es genügt sogar, wenn $\mathfrak{G}$ nur semiabelsch ist, doch sind dann die Nebengruppen (des Typus $\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}x$) im allgemeinen keine Gruppen.

Beweis. Ist $\mathfrak{H}_1\ldots\mathfrak{H}_n=\mathfrak{H}$, so ist nach § 7, Satz 1

$$(\mathfrak{H}_1\ldots\mathfrak{H}_1a_1)\ldots(\mathfrak{H}_n\ldots\mathfrak{H}_na_n)=\mathfrak{H}\ldots\mathfrak{H}(a_1\ldots a_n).$$

In Abschnitt 4, § 4 bringt Prüfer den

Satz 5. *Sind $\mathfrak{F}_\nu$ und $\mathfrak{G}_\nu$ paarweise Nebenscharen voneinander, so*

sind die Durchschnitte Δ_f und Δ_g Nebenscharen voneinander, falls beide Durchschnitte existieren.

Dies gilt allgemein, falls Prüfers Nebenbedingungen erfüllt sind.

Beweis. Es seien F und G zwei Elemente aus Δ_f bzw. Δ_g und $\mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{F}_\nu \dots \mathfrak{F}_\nu x_\nu$. Dann ist $FG \dots G\mathfrak{G}_\nu = F\mathfrak{G}_\nu \dots \mathfrak{G}_\nu = (F \dots F)\mathfrak{G}_\nu \dots \mathfrak{G}_\nu = (F \dots F)(\mathfrak{F}_\nu \dots \mathfrak{F}_\nu x_\nu) \dots (\mathfrak{F}_\nu \dots \mathfrak{F}_\nu x_\nu) = \mathfrak{F}_\nu \dots \mathfrak{F}_\nu F = \mathfrak{F}_\nu$ [vgl. § 7, Satz 1]. Also ist $FG \dots G\Delta_g$ in Δ_f und analog $GF \dots F\Delta_f$ in Δ_g enthalten, woraus durch Vorsetzen von $FG \dots G$ folgt, daß Δ_f in $FG \dots G\Delta_g$ enthalten ist. Beides zusammen ergibt $\Delta_f = FG \dots G\Delta_g = \Delta_g G \dots GF$, womit nach Satz 4 alles gezeigt ist.

Daß für Hüllgruppen kein entsprechender Satz gilt, ist durch einfache Beispiele zu belegen. Im übrigen bringt Prüfer in § 4 diejenigen Sätze, die hier in § 5 und § 6 über die Faktorgruppen von Seminormalteilern allgemein bewiesen sind. In § 5 wird zunächst der Isomorphiebegriff wie üblich eingeführt und Satz 6 aus § 7 der vorliegenden Arbeit bewiesen. Es folgt dann, daß unter Berücksichtigung der Prüferschen Nebenbedingungen alle Nebenscharen miteinander isomorph sind. Weiterhin werden durch Spezialisierung des mittleren Faktors [vgl. § 2, Satz 7] aus den Prüferschen 3-Gruppen 2-Gruppen abgeleitet und Zusammenhänge zwischen beiden aufgewiesen, doch liegen diese Dinge außerhalb dessen, was ich in dieser Arbeit zeigen wollte. Ebenfalls gilt dies betreffs eines näheren Eingehens auf die Anwendungen der allgemeinen Theorie der n-Gruppen in der gewöhnlichen Gruppentheorie, worüber in den folgenden Paragraphen von Prüfer Näheres zu ersehen ist.

(Eingegangen am 24. Juni 1927.)

Über die Summierbarkeit von Fourierschen Reihen und Integralen.

Von

M. Jacob in Wien.

1. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, einige neuere Resultate von O. Szász[1]) und G. Alexits[2]) unter weitergehenden Voraussetzungen zu beweisen. Gleichzeitig wird es uns gelingen, die erwähnten Sätze auf jede positive Ordnung der Skala der Cesàroschen Summierbarkeit auszudehnen.

Zu diesem Zwecke werden wir zunächst die ganze Untersuchung auf das Studium eines singulären Integrales, welches wir vom Typus C_p genannt haben[3]), zurückführen. Daraus bekommen wir sodann die gewünschten Resultate nicht nur für die Fourierschen Reihen, sondern auch für die Fourierschen Integrale.

Wir werden also im § 1 einige Eigenschaften des Kernes des zu untersuchenden singulären Integrales kurz vorbringen, im § 2 die Darstellungsmöglichkeit durch das singuläre Integral vom Typus C_p studieren und im § 3 den Übergang vom singulären Integrale zu den Fourierschen Reihen und zu den Fourierschen Integralen in bekannter Weise vollziehen.

§ 1.

Die Funktion $C_p(t)$.

2. In den folgenden Untersuchungen spielt die nachstehende Funktion

$$C_p(t) = \frac{t^p}{\Gamma(p+1)}\left\{1 - \frac{t^2}{(p+1)(p+2)} + \frac{t^4}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} - \cdots\right\}$$
$$(p \geqq 0)$$

[1]) O. Szász, 1, 2. (Vgl. das Literaturverzeichnis am Schlusse dieser Arbeit.)

[2]) G. Alexits, 1.

[3]) M. Jacob, 1, 2, 3. Die vorliegende Note enthält eine Verschärfung der Resultate meiner zitierten Arbeiten und schließt sich methodisch völlig an die Arbeit 1. an. Ich benutze diese Gelegenheit, um Herrn Prof. Szász für das freundliche Interesse für diese Arbeit aufrichtig zu danken.

eine wesentliche Rolle; sie ist eine Verallgemeinerung des Sinus und des Cosinus und wurde von W. H. Young [4]) eingehend studiert. Wir stützen uns im folgenden auf seine Resultate. Es ist:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &C_0(t)=\cos t, \\ &C_1(t)=\sin t, \qquad\qquad C_p(t)=\frac{d}{dt}C_{p+1}(t), \\ &\quad\ldots\ldots \end{aligned}$$

für $p \geqq 2$

$$C_p(t)=\frac{t^{p-2}}{\Gamma(p-1)}-C_{p-2}(t), \qquad C_{p+1}(t)=\int_0^t C_p(u)\,du.$$

Für $0 \leqq p \leqq 2$ ist $C_p(t)$ beschränkt, für $p>2$ nicht mehr. Betrachtet man die Funktion $C_p(t)\cdot t^{-p}$, welche im folgenden eine Hauptrolle spielt, so ist:

$$(2)\qquad C_p(t)\cdot t^{-p}=\begin{cases} O(t^{-p}) & \text{für } 0 \leqq p \leqq 2, \\ O(t^{-2}) & \text{für } p>2. \end{cases}$$

Daraus folgt, daß für $p>1$ die Funktion $C_p(t)\cdot t^{-p}$ in $[-\infty, \infty]$ absolut integrierbar ist; wir werden uns also auf den Fall $p>1$ beschränken müssen. Bildet man

$$(3)\qquad \frac{d}{dt}(C_p(t)\cdot t^{-p})=\frac{1}{t}\{C_{p-1}(t)\cdot t^{-p+1}-pC_p(t)\cdot t^{-p}\},$$

so ist

$$(4)\qquad \frac{d}{dt}(C_p(t)\cdot t^{-p})=\begin{cases} O(t^{-p}) & \text{für } 1<p \leqq 3, \\ O(t^{-3}) & \text{für } p>3. \end{cases}$$

Die Ableitung der Funktion $C_p(t)\cdot t^{-p}$ ist also für $p>1$ in $[-\infty, \infty]$ auch absolut integrierbar; daraus folgt, daß $C_p(t)\cdot t^{-p}$ für $p>1$ in $[-\infty, \infty]$ von beschränkter Schwankung ist.

Für $p>1$ hat $C_p(t)\cdot t^{-p}$ folgende Fouriersche Integraldarstellung

$$(5)\qquad C_p(t)\cdot t^{-p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1(1-\lambda)^{p-1}\cos\lambda t\,d\lambda.$$

Umgekehrt gilt

$$(5.1)\qquad \int_0^\infty C_p(t)\cdot t^{-p}\cos\lambda t\,dt=\begin{cases} \frac{\pi}{2\Gamma(p)}(1-\lambda)^{p-1} & \text{für } 0 \leqq \lambda \leqq 1, \\ 0 & \text{für } \lambda>1. \end{cases}$$

Aus (5.1) folgt

$$(5.2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} C_p(t)\cdot t^{-p}\,dt=\frac{\pi}{\Gamma(p)}=\omega_p\ ^{5}).$$

---

[4]) W. H. Young, 1.

[5]) Die Relation (5.2) gilt sogar für $p>0$. Dadurch hat der unter (6) definierte Kern für $p>0$ einen Sinn; für $p=0$ setzen wir $\varphi_0(nt)=\frac{n}{\pi}\cos nt$.

Nach diesen Vorbereitungen definieren wir den Kern

$$(6) \qquad \varphi_p(n(\xi-x)) = \frac{n}{\omega_p} C_p[n(\xi-x)]\cdot[n(\xi-x)]^{-p}.$$

Bezeichnet man, wenn $\xi - x = t$ gesetzt wird,

$$(7) \qquad \varphi_p(nt) = \varphi_p^{(0)}(nt), \qquad \frac{d^r}{dt^r}\varphi_p(nt) = \varphi_p^{(r)}(nt),$$

so findet man für $p \geqq r+1$ $(r \geqq 0)$

$$(8) \quad \varphi_p^{(r)}(nt) = \frac{(-1)^r}{t^r}\left\{\sum_{\nu=0}^{r} c_\nu^{p,r}\,\varphi_{p-\nu}(nt)\right\}, \qquad c_\nu^{p,r} = (-1)^\nu \binom{r}{\nu}\frac{\Gamma(p+r-\nu)}{\Gamma(p-\nu)}.$$

In Hinsicht auf (8) und (2) bekommt man

$$(9) \quad \varphi_p^{(r)}(nt) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{n^\delta}\,t^{-1-\delta-r}\right) & \text{für} \quad r \geqq 0,\ r+1 < p < r+2, \\ O\left(\frac{1}{n}\,t^{-2-r}\right) & \text{für} \quad r \geqq 0,\ p \geqq r+2. \end{cases} \qquad \delta = p - [p],$$

Es sei noch erwähnt, daß die Funktion $C_p(t)$ für $p \geqq 2$ nichtnegativ ist, während für $0 \leqq p \leqq 2$ das nicht zutrifft. Aus dieser Tatsache ergeben sich nachher wichtige Schlüsse für die Gültigkeit des Satzes III.

§ 2.

Das singuläre Integral vom Typus C_p.

3. Es sei $f(\xi)$ eine in $[-\infty, \infty]$ meßbare, in jedem endlichen Intervalle integrierbare Funktion, für die im Unendlichen die folgenden Integrale existieren sollen

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\xi)|}{1+|\xi|^p}\,d\xi \quad \text{für} \quad 1 < p \leqq 2, \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\xi)|}{1+\xi^2}\,d\xi \quad \text{für} \quad p > 2. \end{aligned}$$

Dann bilden wir das singuläre Integral vom Typus C_p

$$(11) \qquad J_p(n, f(\xi), x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\varphi_p(n(\xi-x))\,d\xi$$

und behaupten den folgenden

Satz I. *Genügt $f(\xi)$ an der Stelle $\xi = x$ den folgenden Bedingungen*

$$(\overline{\text{A}}.\,\text{r}) \qquad \int_0^h G_r(t)\,dt = o(h^{1+\alpha})$$

$$(\overline{\overline{\text{A}}}.\,\text{r}) \qquad \int_0^h |G_r(t)|\,dt = O(h^{1+\alpha}) \qquad r \geqq 0, \quad 0 \leqq \alpha < 1,$$

dann ist für jedes $p > r+1+\alpha$

$$\lim_{n=\infty} n^{\alpha}\{J_p(n, f(\xi), x) - f(x)\} = 0 \qquad (r \geqq 0).$$

Dabei bedeutet

$$G_0(t) = g_0(t) = g(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x),$$

$$g_r(t) = \int_0^t g_{r-1}(u)\,du, \qquad G_r(t) = \frac{r!}{t^r} g_r(t).$$

Wir führen den Beweis zunächst für den Fall $r = 0$ und $1+\alpha < p \leqq 2$ durch: ganz analog wird der Fall $r = 0$ und $p > 2$ behandelt. Der Fall $r \geqq 1$ wird dann in einfacher und durchsichtiger Weise auf das Frühere zurückgeführt. Wir haben also zu beweisen $(p = 1+k \leqq 2)$

$$J_{1+k}(n, f(\xi), x) - f(x) = \Delta_{1+k}(n, f(\xi), x) = \{\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(3)}\} = o(n^{-\alpha}),$$

$$\Delta_{1+k}(n, f(\xi), x) = 2\int_0^{\infty} g(t)\cdot\varphi_{1+k}(2nt)\,dt = \int_0^{P/n} + \int_{P/n}^{h} + \int_h^{\infty} = \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(3)}.$$

Bevor wir auf die Abschätzung der letzten drei Integrale näher eingehen, wollen wir auf die wesentliche Voraussetzung eines jeden gleich aufmerksam machen. Für die Abschätzung von $\Delta^{(1)}$ genügt die Voraussetzung (Ā. r), bei $\Delta^{(2)}$ spielt (A. r) eine wesentliche Rolle, während bei der Abschätzung von $\Delta^{(3)}$ schon die Endlichkeit von $f(x)$ genügen würde.

Wir betrachten zunächst $\Delta^{(3)}$:

$$(13) \qquad \Delta^{(3)} = 2\int_h^{\infty} g(t)\,\varphi_{1+k}(2nt)\,dt = O\left(\frac{1}{n^k}\int_h^{\infty} \frac{|g(t)|}{t^{1+k}}\,dt\right) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

und somit

$$\Delta^{(3)} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\cdot\frac{1}{n^{k-\alpha}}\right) = o(n^{-\alpha}). \qquad (I)$$

Um nun $\Delta^{(1)}$ und $\Delta^{(2)}$ abzuschätzen, wählen wir zuerst eine Zahl P so groß, daß $P^{\alpha-k}$ beliebig klein wird; nachher wählen wir n hinreichend groß, so daß $\frac{P}{n} < h$ ist. Durch partielle Integration bekommt man

$$(14) \qquad \Delta^{(1)} = \int_0^{P/n} 2\,g(t)\,\varphi_{1+k}(2nt)\,dt = 2\,g_1(t)\,\varphi_{1+k}(2nt)\Big]_0^{P/n} - \int_0^{P/n} 2\,g_1(t)\,\varphi_{1+k}^{(1)}(2nt)\,dt.$$

Wegen (2), (9) und der Voraussetzung (Ā. 0), $(r = 0)$, hat man also

$$(15)\quad \Delta^{(1)} = O\Big\{ \frac{g_1(P/n)}{(P/n)^{1+\alpha}} \cdot \Big(\frac{P}{n}\Big)^{1+\alpha} \cdot \frac{1}{n^k} \cdot \Big(\frac{P}{n}\Big)^{-(1+k)} + \int_0^{P/n} \Big| \frac{g_1(t)}{t^{1+\alpha}} \Big| \cdot \Big| t^{1+\alpha} \frac{d}{dt} \varphi_{1+k}(2nt) \Big| dt \Big\}$$

$$= o(n^{-\alpha} \cdot P^{\alpha-k}) + O\Big\{ n^{-\alpha} \int_0^{2P} \Big| \frac{g_1(t/2n)}{(t/2n)^{1+\alpha}} \Big| \cdot \Big| t^{1+\alpha} \frac{d}{dt} \varphi_{1+k}(t) \Big| dt \Big\}$$

$$= o(n^{-\alpha}) + o\Big\{ n^{-\alpha} \int_0^{2P} t^{1+\alpha} \Big| \frac{d}{dt} \varphi_{1+k} \Big| dt \Big\}$$

$$= o(n^{-\alpha}) \qquad \text{(II)}$$

Es bleibt also noch das Integral $\Delta^{(2)}$ zu untersuchen:

$$(16)\quad \Delta^{(2)} = \int_{P/n}^{h} 2g(t)\, \varphi_{1+k}(2nt)\, dt = O\Big\{ \frac{1}{n^k} \int_{P/n}^{h} |g(t)| \frac{dt}{t^{1+k}} \Big\}.$$

Bezeichnet man

$$\int_0^h |g(t)|\, dt = g_1^*(h),$$

so bekommen wir durch partielle Integration, unter Berücksichtigung von ($\bar{\text{A}}$. 0),

$$(17)\quad \Delta^{(2)} = O\Big\{ \frac{1}{n^k} g_1^*(t) \cdot \frac{1}{t^{1+k}} \Big]_{P/n}^{h} + \frac{(1+k)}{n^k} \int_{P/n}^{h} g_1^*(t) \cdot \frac{dt}{t^{2+k}} \Big\}$$

$$= O\Big\{ \frac{1}{n^k} \frac{g_1^*(t)}{t^{1+\alpha}} \cdot \frac{1}{t^{k-\alpha}} \Big]_{P/n}^{h} + \frac{1+k}{n^k} \int_{P/n}^{h} \frac{g_1^*(t)}{t^{1+\alpha}} \cdot \frac{dt}{t^{1+k-\alpha}} \Big\}$$

$$= O\Big(\frac{1}{n^k}\Big) + O\Big(\frac{1}{n^k} \cdot \Big(\frac{P}{n}\Big)^{\alpha-k}\Big) + O\Big(\frac{1}{n^k} \int_{P/n}^{h} \frac{dt}{t^{1+k-\alpha}}\Big)$$

$$= o(n^{-\alpha}) + O(n^{-\alpha} \cdot P^{\alpha-k}) = o(n^{-\alpha}). \qquad \text{(III)}$$

Hiermit ist:

$$\Delta_{1+k}(n, f(\xi), x) = \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} + \Delta^{(3)} = o(n^{-\alpha}),$$

w. z. b. w.

Bis nun haben wir den Fall $r = 0$ und $p = 1 + k$ betrachtet, wobei $\alpha < k \leqq 1$ war. Für $r = 0$ und $p > 2$ ist in dem vorhergehenden Beweise überall k durch 1 zu ersetzen, wie aus (2) hervorgeht. Somit ist der Fall $r = 0$ erledigt. Untersucht man nun den Fall $r \geqq 1$, so hat man sich auf den Index $p > r + 1 + \alpha$ zu beschränken. In diesem Falle ist

$$(18)\quad \Delta^{(3)} = \int_h^{\infty} 2g(t)\, \varphi_p(2nt)\, dt = O\Big(\frac{1}{n} \int_h^{\infty} \frac{|g(t)|}{t^2} dt\Big) = O\Big(\frac{1}{n}\Big) = o(n^{-\alpha}),$$

und für

$$\Delta^{(4)} = \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} = 2\int_0^h g(t)\,\varphi_p(2nt)\,dt$$

bekommen wir durch partielle Integration

$$(19)\qquad \Delta^{(4)} = 2\sum_{\nu=1}^{r}(-1)^{\nu-1} g_\nu(t)\,\varphi_p^{(\nu-1)}(2nt)\Big]_0^h + (-1)^r 2\int_0^h g_r(t)\,\varphi_p^{(r)}(2nt)\,dt = \Delta^{(5)} + \Delta^{(6)}.$$

Zufolge (9) ist nun

$$(20)\qquad \Delta^{(5)} = 2\sum_{\nu=1}^{r}(-1)^{\nu-1} g_\nu(h)\,\varphi_p^{(\nu-1)}(2nh) = O\left(\frac{1}{n}\right) = o(n^{-\alpha}).$$

Mit Berücksichtigung von (8) läßt sich das Integral $\Delta^{(6)}$ in (19) folgendermaßen schreiben:

$$(21)\qquad \Delta^{(6)} = (-1)^r 2\int_0^h g_r(t)\,\varphi_p^{(r)}(2nt)\,dt = \sum_{\nu=1}^{r}\frac{2c_\nu^{p,r}}{r!}\int_0^h G_r(t)\,\varphi_{p-\nu}(2nt)\,dt.$$

Jedes der Integrale in (21) ist aber, in Hinsicht auf die Voraussetzungen ($\bar{\text{A}}$. r) und ($\bar{\text{A}}$. r), genau von demselben Typus, den wir bereits für $r = 0$ behandelt haben, und daher ist

$$\Delta^{(6)} = o(n^{-\alpha}).$$

Hiermit ist der Satz I vollständig bewiesen.

4. Es sei nun der Stelle $\xi = x$ eine endliche Zahl $s_{r+\alpha}$ zugeordnet; dann führen wir folgende Bezeichnung ein:

$$H_0^{(\alpha)}(t) = h_0^{(\alpha)}(t) = h^{(\alpha)}(t) = g(t) - s_{r+\alpha}\cdot t^\alpha \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 1),$$

$$h_r^{(\alpha)}(t) = \int_0^t h_{r-1}^{(\alpha)}(u)\,du; \qquad H_r^{(\alpha)}(t) = \frac{r!}{t^r}\,h_r^{(\alpha)}(t).$$

In Hinsicht auf die obige Bezeichnungsweise kann der Satz I folgendermaßen verallgemeinert werden:

Satz II. *Genügt $f(\xi)$ an der Stelle $\xi = x$ den folgenden Bedingungen:*

$$(\text{B. r})\qquad \int_0^h H_r^{(\alpha)}(t)\,dt = o(h^{1+\alpha}) \qquad (0 \leqq \alpha < 1,\ r \geqq 0),$$

$$(\text{B. r})\qquad \int_0^h |H_r^{(\alpha)}(t)|\,dt = O(h^{1+\alpha}),$$

dann ist für jedes $p > r + 1 + \alpha$

$$\lim_{n+\infty} n^\alpha [J_p(n, f(\xi), x) - f(x)] = \gamma_{p,\alpha}\cdot s_{r+\alpha}.$$

Dabei bedeutet

$$\gamma_{p,\alpha} = \lim_{n=\infty} n^\alpha \gamma_{p,\alpha}^{(n)} = \tag{22}$$

$$= \lim_{n=\infty} n^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_p(n(\xi - x)) \cdot \frac{1}{2} \left| \frac{\xi - x}{2} \right|^\alpha d\xi = \frac{1}{2^{\alpha+1}} \cdot \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-\alpha)} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}} .$$

Der Beweis des obigen Satzes läßt sich auf den des Satzes I zurückführen. Setzt man

$$f^*(\xi) = f(\xi) - \frac{1}{2} \left| \frac{\xi - x}{2} \right|^\alpha , \tag{23}$$

so genügt die Funktion $f^*(\xi)$ an der Stelle $\xi = x$ den Bedingungen des Satzes I, und somit ist

$$\lim_{n=\infty} n^\alpha [J_p(n, f^*(\xi), x) - f(x)] = 0 \qquad (f(x) = f^*(x)). \tag{24}$$

Zufolge (23) ist aber die Behauptung (24) gleichwertig mit

$$\lim_{n=\infty} n^\alpha [J_p(n, f(\xi), x) - f(x)] = \gamma_{p,\alpha} \cdot s_{r+\alpha} . \tag{24.1}$$

Nun ist für $\alpha = 0$

$$\gamma_{p,0} = \frac{1}{2} ,$$

und für $0 < \alpha < 1$ hat man

$$\gamma_{p,\alpha} = n^\alpha \gamma_{p,\alpha}(n) = \frac{n^\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_p(n(\xi - x)) \cdot \left| \frac{\xi - x}{2} \right|^\alpha d\xi \tag{22.1}$$

$$= 2n^\alpha \int_0^\infty \varphi_p(2nt) \cdot t^\alpha dt = \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{\Gamma(p)}{\pi} \int_0^\infty C_p(t) \cdot t^{-p+\alpha} dt .$$

Zufolge (5) ist für $p > 1$

$$C_p(t) \cdot t^{-p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 (1-\lambda)^{p-1} \cos \lambda t \, d\lambda = \frac{1}{\Gamma(p-1)} \cdot \frac{1}{t} \int_0^1 (1-\lambda)^{p-2} \sin \lambda t \, d\lambda$$

und daher

$$\gamma_{p,\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{p-1}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \int_0^1 (1-\lambda)^{p-2} \sin \lambda t \, d\lambda \, dt \tag{22.2}$$

$$= \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{p-1}{\pi} \int_0^1 (1-\lambda)^{p-2} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \sin \lambda t \, dt \, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{p-1}{\pi} \int_0^1 (1-\lambda)^{p-2} \lambda^{-\alpha} \int_0^\infty t^{-\alpha} \sin t \, dt \, d\lambda .$$

Wegen

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}\sin t\,dt = \Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$$
$$(0<\alpha<1)$$

bekommt man weiter

$$(22.3)\qquad \gamma_{p,\alpha} = \frac{1}{2^\alpha}\cdot\frac{p-1}{\pi}\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\sin\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^1(1-\lambda)^{p-2}\lambda^{-\alpha}\,d\lambda$$
$$= \frac{1}{2^\alpha}\cdot\frac{p-1}{\pi}\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\sin\frac{\alpha\pi}{2}\cdot\frac{\Gamma(p-1)\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(p-\alpha)}$$
$$= \frac{1}{2^\alpha}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-\alpha)}\cdot\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\cdot\sin\frac{\alpha\pi}{2} = \frac{1}{2^{\alpha+1}}\cdot\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-\alpha)}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}},$$

und somit ist (22) bewiesen.

5. Bisher haben wir den Fall $0 \leqq \alpha < 1$ behandelt; jetzt soll uns noch der Fall $\alpha = k \leqq 1$ interessieren, wobei $p = r+1+k$ gesetzt wird $(r \geqq 0)$. Da ist nun einerseits zu unterscheiden, ob $k<1$ oder $k=1$ ist, während anderseits die Voraussetzungen der Sätze I und II verschärft werden müssen. Wir bekommen den

Satz III. *Genügt* $f(\xi)$ *an der Stelle* $\xi = x$ der Bedingung

$$(\mathrm{C.r})\qquad \int_0^h |H_r^{(k)}(t)|\,dt = o(h^{1+k}) \qquad (0<k\leqq 1),$$

dann gilt

1. $\lim\limits_{n=\infty}\frac{n^k}{\lg n}[J_p(n, f(\xi), x) - f(x)] = 0$ *für* $k<1$,

2. $\lim\limits_{n=\infty}\frac{n}{\lg n}[J_p(n, f(\xi), x) - f(x)] = \frac{p-1}{2\pi}s_{r+1}$ *für* $k=1$.

Beim Beweise des obigen Satzes müssen wir ein wenig anders vorgehen als vorher. Wir setzen wieder

$$(25)\qquad \Delta_p(n,\xi,x) = 2\int_0^\infty g(t)\varphi_p(2nt)\,dt = \int_0^h + \int_h^\infty = \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)}.$$

Genau wie in (18) erhalten wir für $\Delta^{(2)}$

$$(26)\qquad \Delta^{(2)} = 2\int_h^\infty g(t)\varphi_p(2nt)\,dt = O\left(\frac{1}{n^k}\int_h^\infty\frac{|g(t)|}{t^{1+k}}\,dt\right) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

und somit

$$\Delta^{(2)} = o\left(\frac{\lg n}{n^k}\right).$$

Setzt man nun

$$\gamma_{p,k,h}(n) = 2\int_0^h \varphi_p(2nt)\cdot t^k\,dt, \tag{27}$$

so genügt es zu beweisen, daß $(0 < k \leqq 1)$

$$\begin{aligned}&\lim_{n=\infty}\frac{n^k}{\lg n}\left[\Delta^{(1)} - s_{r+k}\cdot\gamma_{p,k,h}\right]\\ &= \lim_{n=\infty}\frac{n^k}{\lg n}\,2\int_0^h (g(t) - s_{r+k}\cdot t^k)\,\varphi_p(2nt)\,dt \qquad (28)\\ &= \lim_{n=\infty}\frac{n^k}{\lg n}\,2\int_0^h h^{(k)}(t)\,\varphi_p(2nt)\,dt = 0.\end{aligned}$$

Durch partielle Integration bekommt man

$$\begin{aligned}\int_0^h h^{(k)}(t)\,\varphi_p(2nt)\,dt &= \sum_{\nu=1}^{r}(-1)^{\nu-1}h_\nu^{(k)}(t)\cdot\varphi_p^{(\nu-1)}(2nt)\Big]_0^h \qquad (29)\\ &+ (-1)^r\int_0^h h_r^{(k)}(t)\,\varphi_p^{(r)}(2nt)\,dt = v_1 + v_2.\end{aligned}$$

In Hinsicht auf (9) ist

$$v_1 = \sum_{\nu=1}^{r}(-1)^{\nu-1}h_\nu^{(k)}(t)\,\varphi_p^{(\nu-1)}(2nt)\Big]_0^h = O\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{\lg n}{n^k}\right) \tag{29.1}$$
$$(0 < k \leqq 1).$$

Nach den Youngschen Resultaten ist auch

$$\varphi_p(2nt) = \begin{cases} O\left(\dfrac{n}{(1+nt)^{1+k}}\right) & \text{für} \quad p = 1+k \leqq 2 \\ O\left(\dfrac{n}{(1+nt)^2}\right) & \text{für} \quad p > 2, \end{cases} \tag{2.1}$$

und daher bekommt man, unter Berücksichtigung von (2.1) und (8),

$$\begin{aligned}v_2 &= \frac{1}{r!}\int_0^h H_r^{(k)}(t)\left(\sum_{\nu=0}^{r} c_\nu^{p,r}\,\varphi_{p-\nu}(2nt)\right)dt \qquad (29.2)\\ &= O\left(\int_0^h |H_r^{(k)}(t)|\,\frac{n}{(1+nt)^{1+k}}\,dt\right)\ ^{6}).\end{aligned}$$

---

[6]) Die Idee der Einführung dieses Majorantenkerns verdankt man Herrn Fejér 1. Die Methode des Herrn Fejér ist aber nur dann anwendbar, wenn man die Voraussetzungen des Satzes II durch die folgende ersetzt:

$$\int_0^h |H_r^{(\alpha)}(t)|\,dt = o(h^{1+\alpha}) \qquad 0 \leqq \alpha < k \leqq 1 \quad (r \geqq 0); \tag{B.r}$$

vgl. hierzu O. Szász 1, 2 und G. Alexits 1. für den Fall $r = 0$.

Unter der Voraussetzung (C. r), wonach

$$H_r^{*(k)}(t) = \int_0^t |H_r^{(k)}(u)|\,du = o(t^{1+k}),$$

liefert das letzte Integral in (29.2)

$$\int_0^h |H_r^{(k)}(t)| \cdot \frac{n}{(1+nt)^{1+k}}\,dt = H_r^{*(k)}(t) \cdot \frac{n}{(1+nt)^{1+k}}\Big]_0^h$$

$$+ \int_0^h H_r^{*(k)}(t) \cdot \frac{(1+k)\cdot n^2}{(1+nt)^{2+k}}\,dt$$

$$= \frac{H_r^{*(k)}(h)}{h^{1+k}} \cdot \frac{nh^{1+k}}{(1+nh)^{1+k}} + (1+k)\int_0^h \frac{H_r^{*(k)}(t)}{t^{1+k}} \cdot \frac{n^2 t^{1+k}}{(1+nt)^{2+k}}\,dt$$

$$= o(n^{-k}) \cdot \left(\frac{nh}{1+nh}\right)^{1+k} + o(1) \cdot \int_0^h \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^{1+k} \cdot \frac{n^{1-k}}{1+nt}\,dt$$

$$= o(n^{-k}) + o(n^{-k}) \cdot \int_0^h \frac{n}{1+nt}\,dt$$

$$= o(n^{-k}) + o\left(\frac{\lg n}{n^k}\right) = o\left(\frac{\lg n}{n^k}\right) \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wir haben nur noch den Ausdruck $\gamma_{p,k,h}(n)$ in (27) zu untersuchen. Für $k<1$ erhält man nach (22) im Grenzfalle $\alpha = k$

$$\lim_{n=\infty} n^k \gamma_{p,k,h}(n) = \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-k)} \cdot \frac{1}{\cos\frac{k\pi}{2}},$$

was damit zusammenhängt, daß $\varphi_{1+k}^{(r)}$ $(r \geqq 0)$ in der Darstellung (8) für $k<1$ ein Glied nicht-konstanten Vorzeichens besitzt, während für $k=1$ das nicht zutrifft.

Daher haben wir für $k<1$

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^k}{\lg n} \cdot \gamma_{p,k,h}(n) = 0. \tag{27.1}$$

Für $k=1$ ist

$$n\gamma_{p,1,h}(n) = 2n\int_0^h \varphi_p(2nt)\cdot t\,dt = \frac{\Gamma(p)}{2\pi}\int_0^{2nh} C_p(t)\cdot t^{-p+1}\,dt.$$

Nach der Definitionsgleichung (1) ist

$$C_p(t) = \frac{t^{p-2}}{\Gamma(p-1)} - C_{p-2}(t)$$

und daher

$$n\cdot\gamma_{p,1,h}(n)=\int_0^1\frac{\Gamma(p)}{2\pi}\cdot C_p(t)\cdot t^{-p+1}\,dt+\frac{p-1}{2\pi}\int_1^{2nh}\frac{dt}{t}+\frac{\Gamma(p)}{2\pi}\int_1^{2nh}C_{p-2}(t)\cdot t^{-p+1}\,dt$$
$$=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3.$$

Nun ist α_1 eine endliche Zahl und $\alpha_3=O(1)$ für alle n; somit ist

$$\lim_{n=\infty}\frac{n}{\lg n}\cdot\gamma_{p,1,h}(n)=\frac{p-1}{2\pi}\tag{27.2}$$

w. z. b. w.

§ 3.

Übergang zu den Fourierschen Reihen und Integralen.

6. Wir wollen am Anfange dieses Paragraphen sogleich die Bemerkung vorausschicken, daß sowohl die periodischen integrierbaren Funktionen, als auch diejenigen Funktionen, die sich zur Fourierschen Integraldarstellung eignen, im Unendlichen die Bedingung (10) erfüllen. Es wird sich also nur darum handeln, den Zusammenhang zwischen dem singulären Integrale (11) und der Fourierreihe bzw. dem Fourierintegrale der betrachteten Funktionen herzustellen.

A. Reihen.

Hilfssatz von W. H. Young[7]). *Es sei $f(\xi)$ eine periodische integrierbare Funktion und*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}{}'(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\tag{30}$$

ihre Fouriersche Reihe; $g(\xi)$ sei in $[-\infty,\infty]$ absolut integrierbar und dortselbst von endlicher Variation. Dann darf man die Fouriersche Reihe (30) nach Multiplikation mit $g(\xi)$ gliedweise integrieren, auch wenn die Grenzen unendlich werden.

Im folgenden wird der Kern $\varphi_p(n(\xi-x))$ für $p>1$ als $g(\xi)$ verwendet. Es sei nun

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}{}'(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\cos\nu t.\tag{31}$$

Nach dem Hilfssatze von Young und nach (5) bekommt man für $p>1$

[7]) W. H. Young, 2.

$$J_p(n,f,x)=\int_0^\infty [f(x+t)+f(x-t)]\,\varphi_p(nt)\,dt$$

$$=\frac{a_0}{2}\cdot\int_0^\infty 2\varphi_p(nt)\,dt+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\,2\int_0^\infty\varphi_p(nt)\cos\nu t\,dt\right\}$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^{p-1}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)$$

und somit den

Satz IV. *Ist $f(\xi)$ eine integrierbare Funktion von der Periode 2π und sind an der Stelle $\xi=x$ die Bedingungen* (B.r) *und* (B.r) *erfüllt, so ist für jedes $\delta>\alpha$*

$$\lim_{n=\infty} n^\alpha[C^{r+\delta}(s_n(x))-f(x)]=s_{r+\alpha}\cdot\frac{1}{2^{\alpha+1}}\cdot\frac{\Gamma(r+\delta+1)}{\Gamma(r+1+\delta-\alpha)}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}.$$

Ist überdies für $\xi=x$ die Voraussetzung (C.r) *erfüllt, so ist*

1. $\lim\limits_{n=\infty}\frac{n^k}{\lg n}[C^{r+k}(s_n(x))-f(x)]=0$ *für* $k<1$,

2. $\lim\limits_{n=\infty}\frac{n}{\lg n}[C^{r+1}(s_n(x))-f(x)]=s_{r+1}\cdot\frac{r+1}{2\pi}$ *für* $k=1$.

Für $r=0$ erhalten wir somit unter allgemeineren Voraussetzungen die Sätze von Szász und Alexits; für $\alpha=0$ und beliebiges $r\geqq 0$ die Sätze von Hardy und Littlewood[8]) und von Pollard[9]).

B. Integrale.

Ist $f(\xi)$ eine in $[-\infty,\infty]$ meßbare Funktion, welche in jedem endlichen Intervalle integrierbar ist und im Unendlichen entweder

a) absolut integrierbar ist, d. h. es existiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|\,d\xi,$$

oder

b) $f(\xi)$ ist von einem x (bzw. $-x$) angefangen quadratisch integrierbar mit einer logarithmischen Zusatzbedingung, d. h. es existieren die Integrale

$$\int_x^\infty(f(\xi)^2\lg\xi\,d\xi\quad\text{und}\quad\int_{-\infty}^{-x}(f(\xi))^2\lg|\xi|\,d\xi,$$

so ordnen wir der Funktion $f(\xi)$ ein Fouriersches Integral zu:

$$f(x)\sim\int_0^\infty(A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x)\,d\lambda. \tag{33}$$

---

[8]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood, 1.

[9]) S. Pollard, 1, 2.

Die in (33) auftretenden Funktionen $A(\lambda)$ und $B(\lambda)$ heißen die Fourierschen Transformierten von $f(\xi)$ und werden in der folgenden Weise gebildet:

$$(34) \qquad A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{z=\infty} \int_{-z}^{z} f(\xi) \cos \lambda \xi \, d\xi; \qquad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{z=\infty} \int_{-z}^{z} f(\xi) \sin \lambda \xi \, d\xi.$$

Die Integrale in (34) existieren überall oder fast überall in λ, je nachdem $f(\xi)$ im Unendlichen der Bedingung a) oder b) genügt.

Es gehöre $f(\xi)$ der soeben besprochenen Funktionenklasse an. Betrachtet man das singuläre Integral[10])

$$(35) \qquad J_p(\mu, f(\xi), x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \varphi_p(\mu(\xi - x)) \, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{0}^{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \cos \lambda (\xi - x) \, d\lambda \, d\xi,$$

so ist in diesem Falle die Integrationsfolge sicherlich vertauschbar, und man bekommt

$$(35.1) \qquad J_p(\mu, f(\xi), x) =$$

$$= \int_{0}^{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{p-1} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi \cdot \cos \lambda x \, d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi \sin \lambda x \, d\xi \right\} d\lambda$$

$$= \int_{0}^{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{p-1} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] \, d\lambda$$

und somit den

Satz V. *Ist $f(\xi)$ eine Funktion, welche im obigen Sinne zur Darstellung durch das Fourierintegral geeignet ist, und sind an der Stelle $\xi = x$ die Bedingungen* (B. r) *und* ($\bar{\text{B}}$. r) *erfüllt, so ist für jedes $\delta > \alpha$*

$$\lim_{\mu=\infty} \mu^{\alpha} \left\{ \int_{0}^{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{r+\delta} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] \, d\lambda - f(x) \right\}$$

$$= s_{r+\alpha} \cdot \frac{1}{2^{\alpha+1}} \cdot \frac{\Gamma(r+\delta+1)}{\Gamma(r+\delta+1-\alpha)} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\alpha \pi}{2}}.$$

---

[10]) Die Sätze I und II gelten auch, wenn die Folge der natürlichen Zahlen durch eine beliebige Folge positiver monoton wachsender Zahlen $\{k_n\}$ ersetzt wird, für die $\lim_{n=\infty} k_n = \infty$.

Ist überdies für $\xi = x$ die Voraussetzung (C. r) *erfüllt, so ist*

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{\mu^k}{\lg \mu} \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{r+k} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] - f(x) \right\} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } k < 1, \\ s_{r+1} \frac{r+1}{2\pi} & \text{für } k = 1. \end{cases}$$

Literaturverzeichnis.

G. Alexits, 1, Über den Grad der Annäherung durch die Cesàroschen Mittel der Fourierreihe, Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. **3** (1927), S. 32–37.

L. Fejér, 1, Über die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Fourierreihe, Göttinger Nachrichten 1925, math.-phys. Kl. S. 13–17.

G. H. Hardy and J. E. Littlewood, 1, The Fourier series of a positive function, Journ. Lond. Math. Soc. **1** (1926), p. 134–138.

M. Jacob, 1, Über die Cesàrosche Summierbarkeit des Fourierschen Integrales, Bull. intern. de l'Acad., Pol. de Cracovie, Série A: Scien. mathem. 1926, p. 40–74.

M. Jacob, 2, Über die Verallgemeinerung einiger Theoreme von Hardy in der Theorie der Fourierschen Reihen, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **26** (1927), p. 470–492.

M. Jacob, 3, Bemerkung zur Konvergenz und Summierarbeit Fourierscher Reihen. Journ. Lond. Math. Soc. **3** (1928), p. 124–129.

S. Pollard, 1, Direct proof of a new criterion of summability of a Fourier series, Journal Lond. Math. Soc. **1** (1926), p. 233–235.

S. Pollard, 2, The Summation of a Fourier integral of finite type. Proc. Camb. Phil. Soc. **23** (1927) p. 373–382.

O. Szász, 1, Über die arithmetischen Mittel Fourierscher Reihen, Acta mathem. **48** (1926), S. 355–362.

O. Szász, 2, Über die Cesàroschen Mittel Fourierscher Reihen, Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. **3** (1927), S. 38–48.

W. H. Young, 1, On infinite integrals involving a generalization of the sine and cosine functions, Quarterly Journ. of Mathem. **43** (1911), p. 161–177.

W. H. Young, 2, On the integration of Fouriers series, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **9**, p. 449–462.

Wien, am 29. Juni 1927.

(Eingegangen am 3. Juli 1927.)

Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette.

Von

Otto Schmidt in Moskau.

1. Die Theorie der endlichen Gruppen ist bis in weitgehende Einzelheiten ausgebaut. Gerade diese Einzelheiten, das verschiedenartige individuelle Verhalten der einzelnen Gruppentypen, bei gleichzeitiger Herrschaft sehr allgemeiner Gesetze, geben der Theorie ihren besonderen Reiz. In den weitverzweigten Anwendungen des Gruppenbegriffs begegnet man aber nicht weniger oft *unendlichen* Gruppen, und daher entsteht die Frage, in welchem Maße die für endliche Gruppen gewonnenen Gesetze sich auf diese oder jene unendliche übertragen lassen. Auf Übertragung der Einzelheiten wird man ja verzichten müssen, es wird sich hauptsächlich um die allgemeinsten Fundamentalsätze handeln. Die Aufgabe wird nun darin bestehen, aus den unendlichen Gruppen durch entsprechende Definition solche Klassen herauszugreifen, die einerseits die Fundamentalsätze der endlichen Gruppentheorie noch beibehalten, andererseits aber auch ein genügend großes Anwendungsgebiet erhalten können.

Einen glücklichen Schritt in dieser Richtung hat Herr W. Krull getan, allerdings in Beschränkung auf kommutative (Abelsche) Gruppen. W. Krull[1]) definiert „verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen“ und beweist, daß für diese (im allgemeinen unendlichen) Gruppen der Hauptsatz der Theorie endlicher Abelscher Gruppen erhalten bleibt: die im wesentlichen eindeutige Zerlegung in direkte unzerlegbare Faktoren.

Während aber unter den endlichen Abelschen Gruppen nur die zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung unzerlegbar sind, können wir hier, bei den verallgemeinerten, nichts Bestimmtes über die unzerlegbaren Gruppen aussagen. Zum Beweise mußte darum zu den allgemeineren

[1]) W. Krull, Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, Math. Zeitschrift **23** (1925).

Sätzen von R. Remak[2]) über die Zerlegung endlicher, aber nicht notwendig kommutativer Gruppen zurückgekehrt werden. Aber auch die Übertragung des Remakschen Beweises erwies sich als unmöglich, so daß W. Krull zum Beweise seines „Fundamentalsatzes" einen weitläufigen Apparat von Zwischensätzen unter neuen Definitionen (Zurückleitungsgruppe) mobilisierte.

Ich habe für die Sätze von Remak seinerzeit einfache Beweise und Verschärfungen gegeben[3]). Diese Beweise lassen sich allerdings auf die verallgemeinerten Gruppen von Krull auch nicht direkt übertragen, doch gelingt es auch in diesem Fall ähnliche Schlußweisen anzuwenden, die einen sehr einfachen Beweis des „Fundamentalsatzes" von W. Krull ergeben.

Dieser Beweis ist aber *nicht* auf Abelsche Gruppen beschränkt, sondern bleibt auch für *nicht-kommutative Gruppen* desselben Typus („verallgemeinerte endliche") richtig. Der Beweis besteht in einem Induktionsverfahren, das sich auf die Übertragung des Jordanschen Satzes über Kompositionsreihen auf unsere verallgemeinerte Gruppen stützt. Diese Übertragung ist von W. Krull in einer zweiten Arbeit[4]) gegeben (auch nur für Abelsche Gruppen) und von E. Noether[5]) in allgemeiner Form. — Der Vollständigkeit wegen beweise ich den für den Hauptsatz nötigen Teil des Jordanschen Satzes noch einmal, ohne damit etwas Neues zu sagen.

2. Definition. *Gruppen mit endlicher Kette oder verallgemeinerte endliche Gruppen* (abgekürzt: v. e. G.) *sind diejenigen Gruppen, bei denen von keiner invarianten Untergruppe ausgehend eine unendliche Kette von invarianten Untergruppen (oder Obergruppen) entstehen kann*[6]).

Unter einer Kette von Untergruppen wird eine Reihe $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \ldots$ verstanden, in der jedes $\mathfrak{G}_i$ eine echte invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_{i-1}$ ist. Für Obergruppen gilt das gleiche, nur ist $\mathfrak{G}_i$ echte invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_{i+1}$.

---

[2]) R. Remak, Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, Journal für r. u. a. Mathematik **139**.

[3]) O. Schmidt, Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, Universitetskije Izvestija (Kiew), 1912. — O. Schmidt, Sur les produits directs, Bulletin de la Société Math. de France, t. XLI (1913). — Der zweite dieser Beweise ist in A. Speisers Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin 1923, wiedergegeben, der erste in meinem Buche „Abstrakte Gruppentheorie", Kiew 1916 (russ.).

[4]) W. Krull, Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, Sitzungsber. der Heidelberger Akademie 1926.

[5]) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen **96** (1926).

[6]) Die Krullsche Bezeichnung „verallgemeinerte endliche Gruppen" scheint mir etwas unbestimmt. Das Wesentliche *dieser* Verallgemeinerung liegt in dem Begriffe der endlichen Kette, der zum Ideenkreise der Arbeiten von E. Noether gehört.

Diese Definition trifft das Wesentliche der Sache. W. Krull (der sich, wie gesagt, auf kommutative Gruppen beschränkte), fügt im Interesse der Anwendungen noch eine zweite Bedingung hinzu, die wir auch aufnehmen wollen:

Es sei ein gewisses System von *Operatoren* Θ gegeben, die, auf die Gruppenelemente angewandt, wieder Gruppenelemente ergeben und dabei *distributiv* sind, d. h.

$$\Theta(AB) = \Theta(A)\Theta(B).$$

Wir wollen im weiteren *nur* solche Gruppen (und solche Untergruppen) zulassen, die neben jedem Elemente A auch alle $\Theta(A)$ enthalten. Da im Spezialfall das Operatorensystem auch verschwinden (sich auf die Identität reduzieren) kann, so werden unsere Betrachtungen auch für die Gruppen *ohne die letztere Einschränkung* gültig bleiben. Andererseits kann sehr wohl der Fall eintreten, daß eine Gruppe erst unter der Einschränkung eines solchen Operatorensystems „verallgemeinert endlich" wird, da ein Teil der Untergruppen dann als unzulässig ausscheidet.

Es ist aus der Definition des Operatorensystems leicht zu folgern, daß der *Durchschnitt*, die *Zusammenfassung* und das *direkte Produkt* zweier zulässiger Gruppen wieder zulässige Gruppen sind. Ebenso ist auch die Faktorengruppe $\mathfrak{G}|\mathfrak{H}$ bei zulässigen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ eine zulässige Gruppe.

Endlich ist noch der Begriff des Isomorphismus — nach Krull — dahin zu verschärfen, daß bei einander entsprechenden $A, A', A'' \ldots$ und $B, B', B'' \ldots$ nicht nur jedem AA' das BB' entspricht, sondern auch $\Theta(A)$ und $\Theta(B)$ einander entsprechen.

Da wir für das Folgende keine andere Konstruktion als die soeben angegebenen brauchen, so werden wir die „Zulässigkeit" der Gruppen und Untergruppen, von denen die Rede sein wird, im weiteren stillschweigend voraussetzen, ebenso wie das Erfülltsein der „Definition" der v. e. G., die wir einfach „Gruppen" nennen werden. Also wird ein Gebilde nur dann Untergruppe genannt werden, wenn es eine „zulässige" Untergruppe ist. Eine „Kompositionsreihe" $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ wird also aus Gruppen bestehen, von denen jede eine „zulässige" invariante echte Untergruppe der vorhergehenden ist, während keine „zulässige" invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_i$ existiert, die $\mathfrak{G}_{i+1}$ als echten Teiler enthält.

Wir wollen — nach Frobenius — Gruppen mit großen deutschen, Elemente mit den zugehörigen großen lateinischen Buchstaben bezeichnen.

3. Aus der Definition der v. e. G. folgt, daß jede Kompositionsreihe der Gruppe $\mathfrak{G}$ nur eine endliche Anzahl von Gliedern enthält. Damit ist nun zunächst noch nicht gesagt, daß bei den verschiedenen Kompositionsreihen einer Gruppe diese Anzahl unterhalb einer festen Grenze bleibt.

Wohl muß aber unter diesen Anzahlen für jede Gruppe eine *Minimalanzahl* existieren. Wir können alle Gruppen in Klassen nach diesen — ansteigenden — Minimalanzahlen einteilen.

Satz I. (Der Jordansche Satz.) *Alle Kompositionsreihen einer und derselben v. e. G. enthalten die gleiche Anzahl von Gliedern.*

Sei

$$\mathfrak{G},\ \mathfrak{H}_1,\ \mathfrak{H}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{H}_l = 1$$

eine beliebige Kompositionsreihe der Gruppe $\mathfrak{G}$ und

$$\mathfrak{G},\ \mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{F}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{F}_k = 1$$

eine Kompositionsreihe mit der „Minimalanzahl" k.

Da der Satz für Gruppen mit der „Minimalanzahl" 1, d. h. Gruppen, die keine (zulässigen!) invarianten Untergruppen, außer dem Einheitselemente haben, augenscheinlich gilt, können wir den Schluß durch vollständige Induktion führen, indem wir den Satz für Gruppen mit kleinerer „Minimalanzahl" als bekannt voraussetzen.

Wir betrachten nun, wie es beim Jordan-Hölderschen Satze gewöhnlich geschieht, den Durchschnitt $\mathfrak{M}$ der Gruppen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{F}_1$, die wir als verschieden voraussetzen, was die Allgemeinheit des Beweises nicht beschränkt. Selbstverständlich ist $\mathfrak{M}$ invariant in $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{F}_1$. Wie gewöhnlich, beweisen wir, daß die Komplementärgruppen $\mathfrak{G} \mid \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{F}_1 \mid \mathfrak{M}$ isomorph sind — aus jedem Element $F\,\mathfrak{M}$ der zweiten Gruppe entspringt das entsprechende $F\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{H}_1 = F\,\mathfrak{H}_1$ der ersten, denn $\mathfrak{G}$ ist gleich $\mathfrak{F}_1\,\mathfrak{H}_1$ (weil dieses Produkt invariant in $\mathfrak{G}$ und größer als $\mathfrak{H}_1$ ist). — Wenn zwischen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{M}$ eine invariante Untergruppe $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{F}_1$ existierte, so gäbe es also zugleich eine in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe $\mathfrak{K}\,\mathfrak{H}_1$ zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}_1$ — entgegen der Definition der Kompositionsreihe. Die Gruppe $\mathfrak{K}$ existiert also nicht. Dann können wir aber für $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{F}_1$ je eine Kompositionsreihe bilden, die mit $\mathfrak{M}$ beginnt:

$$\mathfrak{H}_1,\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{M}',\ \ldots$$

$$\mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{M}',\ \ldots\ .$$

Nun besitzt $\mathfrak{F}_1$ offenbar die „Minimalanzahl" $k-1$, für $\mathfrak{F}_1$ gilt der Satz bereits. $\mathfrak{M}$ hat also die Minimalanzahl $k-2$ und $\mathfrak{H}_1$ — für die der Satz gleichfalls gilt — die Minimalanzahl $k-1$. Das bedeutet aber

$$k = l,$$

was zu beweisen war.

Jede v. e. Gruppe besitzt also eine *feste* Anzahl von Gliedern in der Kompositionsreihe, die wir (das Einheitselement ungezählt) die „Kompositionszahl" nennen wollen (bei E. Noether ist $k-1$ die „Länge").

Jetzt ist es klar, daß eine invariante Untergruppe eine *kleinere* Kompositionszahl als die Gruppe hat. Darum kann in unserem Falle niemals eine Gruppe zu ihrer Untergruppe isomorph sein.

Wir haben uns darauf beschränkt, nur den Beweis der Invarianz der Kompositionszahl explizite auszuführen, da wir zum Beweise von Satz II nicht mehr brauchen werden. Es ist aber leicht einzusehen, daß sich der Jordan-Höldersche Satz über Kompositionsreihen *genau* übertragen läßt (Isomorphismus der Komplementärgruppen beider Reihen, abgesehen von der Ordnung, in der dieselben auftreten).

4. Wir wenden uns nun den direkten Produkten zu. Bekanntlich heißt die Zusammenfassung zweier Gruppen ein *direktes Produkt*, wenn beide Faktoren elementfremd sind und jedes Element des einen Faktors mit jedem des anderen vertauschbar ist (W. Krull sagt statt Produkt „Summe"). Wir wollen das direkte Produkt durch einen Punkt bezeichnen.

Wenn

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{F},$$

so ist jedes Element G von $\mathfrak{G}$ auf eine und nur eine Weise in der Form HF darstellbar. H und F heißen die *Komponenten* von G. Wenn G eine (invariante) Untergruppe von $\mathfrak{G}$ durchläuft, so bilden die entsprechenden Komponenten H auch eine (invariante) Untergruppe von $\mathfrak{H}$. Das gilt, wie leicht zu sehen, auch bei den eingeführten Einschränkungen (Operatorensystem Θ). Komponenten vertauschbarer Elemente sind untereinander vertauschbar.

Es ist auch klar, daß die *Kompositionszahl eines direkten Produktes die Summe der Kompositionszahlen der Faktoren ist.* Eine invariante Untergruppe eines Faktors ist zugleich invariant in $\mathfrak{G}$.

Ein Isomorphismus zwischen zwei Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ wird *zentral* genannt, wenn bei einander zugeordneten A und $B = AC$ das Element C immer mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar ist. Wir bemerken ausdrücklich, daß die Gesamtheit der mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbaren Elemente — das *„Zentrum"* von $\mathfrak{G}$ — *keine zulässige* Untergruppe zu sein braucht. Wir werden von der Gruppeneigenschaft des Zentrums nirgends Gebrauch machen.

Den zentralen Isomorphismus wollen wir durch $\sim$ bezeichnen.

Hilfssatz I. *Wenn* $\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D}$ *ist, so sind* $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{D}$ *zentral isomorph.*

Beweis. Die Gruppen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ sind zunächst isomorph, da beide zu der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ isomorph sind. Dieser Isomorphismus ordnet die Elemente B und D einander zu, wenn $\mathfrak{A}B = \mathfrak{A}D$ ist. Hieraus folgt $B = AD$.

Dieses Element A ist nach der Definition des direkten Produktes mit allen Elementen von $\mathfrak{D}$ vertauschbar. Andererseits muß aus demselben Grunde jedes Element von $\mathfrak{A}$ mit B vertauschbar sein, und da es mit D vertauschbar ist, so folgt auch die Vertauschbarkeit mit A. Es stellt sich heraus, daß A mit allen Elementen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$, also auch von $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D} = \mathfrak{G}$ vertauschbar ist — der Isomorphismus ist also ein zentraler.

Hilfssatz II. *Wenn die Zerlegung* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ *gilt,* $\mathfrak{H}$ *eine invariante Untergruppe von* $\mathfrak{G}$ *ist,* $\mathfrak{A}$ *die Gruppe der Komponenten von* $\mathfrak{H}$ *in* $\mathfrak{A}$ *bedeutet und* $\mathfrak{D}$ *den Durchschnitt von* $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{A}$ *isomorph zu* $\mathfrak{H}\,\mathfrak{D}$. — Denn $\mathfrak{D}$ ist ja die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{H}$, die die 1 zur Komponente in $\mathfrak{A}$ haben.

Hilfssatz III. *Wenn* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ *gilt und* $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{H} > \mathfrak{A}$ *ist, so ist* $\mathfrak{H}$ *ein direktes Produkt*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{B}},$$

wo $\overline{\mathfrak{B}}$ *Untergruppe von* $\mathfrak{B}$ *ist.* — Denn jedes Element H von $\mathfrak{H}$ ist in der Form AB darstellbar. Da aber A zu $\mathfrak{H}$ gehört, so gehört auch B zu $\mathfrak{H}$. Sämtliche Komponenten von $\mathfrak{H}$ sind also auch isoliert vorhanden, d. h. sie bilden ein direktes Produkt.

5. Satz II (Der Fundamentalsatz). *Wenn eine v. e. Gruppe* $\mathfrak{G}$ *auf zweierlei Art als direktes Produkt unzerlegbarer Faktoren dargestellt ist:*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \cdot \mathfrak{H}_2 \cdots \mathfrak{H}_k = \mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2 \cdots \mathfrak{F}_l \tag{1}$$

so ist $k = l$, *die Faktoren sind paarweise zentral isomorph und in jedem Produkt kann jeder Faktor durch einen zentral isomorphen der anderen Zerlegung ersetzt werden.*

Der Satz gilt selbstverständlich für Gruppen mit der Kompositionszahl 1, denn sie sind ja unzerlegbar. Wir nehmen ihn allgemein für Gruppen mit kleinerer Kompositionszahl, als die von $\mathfrak{G}$ als bewiesen an und beweisen ihn für $\mathfrak{G}$. Wir erinnern uns, daß die Kompositionszahl eines direkten Produktes gleich der Summe der Zahlen für die Faktoren ist.

Wir wählen einen beliebigen unter den Faktoren beider Seiten. Sei es $\mathfrak{H}_1$. Wir stellen die Elemente von $\mathfrak{H}_1$ durch die Komponenten F_i der rechten Seite dar. Die zu $\mathfrak{F}_i$ gehörigen Komponenten bilden dann eine Gruppe $\overline{\mathfrak{F}}_i$. Wir fügen die nötigen Elemente hinzu, um das direkte Produkt dieser $\overline{\mathfrak{F}}_i$ zu bilden, und erhalten (nach Hilfssatz III):

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \cdot \overline{\mathfrak{H}} = \overline{\mathfrak{F}}_1 \cdot \overline{\mathfrak{F}}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{\mathfrak{F}}_l, \tag{2}$$

wo $\overline{\mathfrak{H}}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}_2 \cdot \mathfrak{H}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k$ ist.

Jedes $\overline{\mathfrak{F}}_i$ ist entweder gleich dem entsprechenden $\mathfrak{F}_i$ oder eine invariante Untergruppe desselben. In diesem letzteren Falle ist die Kompo-

sitionszahl von $\mathfrak{F}_i$ — wie bewiesen — kleiner als die von $\mathfrak{F}_i$. Wenn wir also zunächst den Fall betrachten, daß nicht alle $\overline{\mathfrak{F}}_i$ ihren $\mathfrak{F}_i$ gleich sind, so hat das zuletzt gebildete Produkt $\mathfrak{G}$ eine *kleinere* Kompositionszahl als $\overline{\mathfrak{G}}$. Der Satz gilt für $\overline{\mathfrak{G}}$ bereits, $\mathfrak{H}_1$ muß einem unzerlegbaren Faktor der rechten Seite — etwa einem Faktor $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1$ von $\overline{\mathfrak{F}}_1$ — zentral isomorph und durch ihn ersetzbar sein. (Es muß $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 = \overline{\mathfrak{F}}_1$ sein, aber wir brauchen das nicht.) Die Ersatzbarkeit bedeutet, daß $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1$ mit $\overline{\mathfrak{H}}$ — und um so mehr mit $\mathfrak{H}_2 \cdot \mathfrak{H}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k$ — elementefremd ist, d. h. nach Komponenten der linken Seite von (1) zerlegt, hat jedes $\overline{\overline{F}}_1$ eine von 1 verschiedene H_1-Komponente. Da die Elemente von $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1$ außerdem — als Komponente von $\mathfrak{H}_1$ — mit allen Elementen von $\mathfrak{H}_2 \cdot \mathfrak{H}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k$ vertauschbar sind, so kann man das direkte Produkt $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 \cdot \mathfrak{H}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k$ bilden, das aber — wegen des Isomorphismus von $\mathfrak{H}_1$ und $\overline{\mathfrak{F}}_1$ — gleich $\mathfrak{G}$ ist, so daß wir erhalten:

$$(3) \qquad \mathfrak{G} = \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 \cdot \mathfrak{H}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k = \mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{F}_l .$$

Es muß nun $\overline{\mathfrak{F}}_1 = \mathfrak{F}_1$ sein, weil sonst $\mathfrak{F}_1$ nach Hilfssatz III zerlegbar wäre.

Wir haben jetzt also die Zerlegungen

$$(4) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{H}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k = \mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{F}_l .$$

Nach dem Hilfssatz I ist also

$$\mathfrak{H}_2 \cdot \mathfrak{H}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k \simeq \mathfrak{F}_2 \cdot \mathfrak{F}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{F}_l .$$

Durch diesen Isomorphismus wird jedem Faktor $\mathfrak{F}_i$ der rechten Seite ein zentral isomorpher $\mathfrak{H}_i'$ der linken zugeordnet, so daß wir erhalten

$$\mathfrak{H}_2 \cdot \mathfrak{H}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k = \mathfrak{H}_2' \cdot \mathfrak{H}_3' \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_l' .$$

Diese Gruppe hat aber eine *kleinere* Kompositionszahl als $\mathfrak{G}$, der Satz gilt bereits, also ist

$$k = l$$

$$\mathfrak{H}_i \simeq \mathfrak{H}_i' \sim \mathfrak{F}_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, k).$$

Wir hatten bereits den Isomorphismus von $\mathfrak{H}_1$ und $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 = \mathfrak{F}_1$, der aber zunächst nur in $\overline{\mathfrak{G}}$ zentral war. Daraus folgt bereits, daß bei einander entsprechenden Elementen F_1 und $H_1 = F_1 C_1$ die Elemente C_1 mit allen Elementen von $\mathfrak{H}_1$ (die ja zu $\overline{\mathfrak{G}}$ gehören) vertauschbar sind. Aus (4) folgt aber auch, daß alle F_1 wie auch alle H_1 uud darum auch alle C_1 mit allen Elementen von $\mathfrak{H}_2 \cdot \mathfrak{H}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k$ vertauschbar sind, also ist C_1 mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar, wir haben

$$\mathfrak{H}_1 \sim \mathfrak{F}_1 .$$

Damit ist der Beweis des zentralen Isomorphismus für den Fall beendet, daß $\mathfrak{G} < \mathfrak{G}$ ist. Im Falle aber, daß $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ und alle $\overline{\mathfrak{F}}_i = \mathfrak{F}_i$ sind, beginnen wir mit $\mathfrak{F}_1$ statt mit $\mathfrak{H}_1$, zerlegen die Elemente von $\mathfrak{F}_1$ nach den

Faktoren der *linken* Seite und bilden aus den Komponenten das direkte Produkt

$$\mathfrak{H}_1 \cdot \mathfrak{H}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{\mathfrak{H}}_k = \bar{\mathfrak{F}}_1 \cdot \mathfrak{F}.$$

Sollten wieder alle $\bar{\mathfrak{H}}_i$ gleich ihren $\mathfrak{H}_i$ sein, so würde das ergeben, daß nicht nur alle F_i Komponenten von $\mathfrak{H}_1$, sondern auch alle H_i Komponenten von $\mathfrak{F}_1$ sind.

Wenn $\mathfrak{D}$ den Durchschnitt von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{F}_2 \ldots \mathfrak{F}_l$ und $\mathfrak{E}$ den Durchschnitt von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{H}_2 \ldots \mathfrak{H}_k$ bezeichnet, so muß nach Hilfssatz II in diesem Falle $\mathfrak{F}_1$ zu $\mathfrak{H}_1 | \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}_1$ zu $\mathfrak{F}_1 | \mathfrak{E}$ isomorph sein. Das ist aber bei v. e. Gruppen, wo doch die Faktorengruppen kleinere Kompositionszahlen als ihre Zähler haben, nur dann möglich, wenn $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} = 1$. Also sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ isomorph. Alle Elemente von $\mathfrak{H}_2 \ldots \mathfrak{H}_k$, die mit allen Komponenten von $\mathfrak{H}_1$ vertauschbar sein müssen, sind in diesem Falle mit allen Elementen von $\mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2 \ldots \mathfrak{F}_l = \mathfrak{G}$ vertauschbar, also ist der Isomorphismus von $\mathfrak{F}_1$ mit $\mathfrak{H}_1$ ein zentraler. Da außerdem $\mathfrak{H}_1$ mit $\mathfrak{F}_2 \cdot \mathfrak{F}_3 \ldots \mathfrak{F}_l$ teilerfremd ist, so läßt sich in (1) $\mathfrak{F}_1$ durch $\mathfrak{H}_1$ ersetzen (oder umgekehrt). Weiter — wie oben. Der Satz ist also in allen Fällen bewiesen.

6. Als Spezialfall für *kommutative* v. e. Gruppen erhalten wir den Satz von W. Krull. In diesem Falle könnte der Beweis in einigen Stellen noch mehr vereinfacht werden, da ja bei Abelschen Gruppen jede Untergruppe invariant nnd jeder Isomorphismus zwischen Untergruppen zentral ist. Die Ersetzbarkeit der isomorphen Faktoren durch einander wird bei W. Krull nicht bewiesen.

Einen anderen Spezialfall bilden die gewöhnlichen *endlichen* Gruppen, seien sie kommutativ oder nicht. Dann erhalten wir die Sätze von R. Remak. Dieser Beweis der Remakschen Sätze dürfte noch kürzer sein, als meine vorhergehenden Beweise, denn Satz I — der Satz von Jordan — braucht ja für endliche Gruppen nicht neu bewiesen zu werden.

(Eingegangen am 14. Juli 1927.)

Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern.

Von

Wolfgang Krull in Freiburg i. Br.

In einer in der Mathematischen Zeitschrift erschienenen Arbeit [1]) hat der im Weltkrieg gefallene E. Stiemke allgemeine Grundsätze für die Behandlung der Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern entwickelt und die Zerlegung der Hauptideale in denjenigen Körpern [2]) bestimmt, in denen jedes Ideal nur endlich viel Primidealteiler besitzt, und die ich im folgenden kurz als „Stiemkesche Körper" bezeichnen werde. In einem Stiemkeschen Körper läßt sich jedes Hauptideal eindeutig als Produkt von endlich vielen teilerfremden, jeweils nur durch ein einziges Primideal teilbaren „Primäridealen" [3]) darstellen. Die Primärideale sind entweder (wie bei endlichen Körpern) Primidealpotenzen, oder sie lassen sich als Potenzen der in dem zugehörigen Primideal enthaltenen Primzahl mit rationalen gebrochenen Exponenten auffassen.

Im folgenden wird über Stiemke hinaus die Zerlegung von ganz beliebigen Idealen (auch von solchen ohne endliche Idealbasis) in beliebigen Zahlkörpern untersucht. Das Hauptergebnis lautet:

Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ läßt sich als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von teilerfremden Primäridealen darstellen. Gehen in $\mathfrak{a}$ nur endlich viele Primideale auf, so ist die Darstellung absolut eindeutig; besitzt dagegen $\mathfrak{a}$ unendlich viele Primidealteiler, so sind die (unendlich vielen) Primär-

[1]) „Über unendliche algebraische Zahlkörper", Math. Zeitschr. **25** (1926). Die Stiemkesche Arbeit wird in Zukunft mit „St." zitiert.

[2]) In der Einleitung verstehen wir unter einem „Ideal aus dem Körper $\mathfrak{K}$" stets ein Ideal aus dem Ring aller ganzen algebraischen Zahlen von $\mathfrak{K}$, während in § 1 der Note die Zerlegung der Ideale eines beliebigen Unterringes von $\mathfrak{K}$ untersucht wird.

[3]) Das Wort „Primärideal" brauche ich im Anschluß an die Terminologie von E. Noether, nach Dedekind müßte es „einartiges Ideal" heißen. Stiemke hat für den Begriff des Primärideals überhaupt kein besonderes Wort, sondern nur die Symbole π^r und $\mathfrak{p}^k$.

komponenten von $\mathfrak{a}$ nur bei einer geeigneten (naheliegenden) Normierung eindeutig bestimmt.

Die zu einem festen Primideal $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale sind entweder sämtlich Potenzen von $\mathfrak{p}$, oder es stellt (außer $\mathfrak{p}$ selbst) kein Primärideal eine Potenz von $\mathfrak{p}$ dar. In diesem letzteren Fall ist jedes zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal durch seinen „Wert“ und die Angabe ob „endlich“ oder „unendlich“ eindeutig bestimmt. Ein Primärideal heißt endlich oder unendlich, je nachdem ob es normierte Primärkomponente eines Ideals mit endlicher Basis ist oder nicht. Der Wert ist eine reelle Zahl, er ist rational bei endlichen, rational oder irrational bei unendlichen Primäridealen; das Primideal $\mathfrak{p}$ (und das Einheitsideal $\mathfrak{o}$) besitzen den Wert 0. Bei endlichen Primäridealen in Stiemkeschen Körpern ist der Wert mit dem Stiemkeschen gebrochenen Exponenten identisch. Die Multiplikation zweier zu $\mathfrak{p}$ gehöriger Primärideale geschieht nach dem Gesetz von der Addition der Werte und nach der Regel endlich $\times$ endlich = endlich; endlich $\times$ unendlich = unendlich $\times$ unendlich = unendlich.

Die angegebenen Resultate setzen uns instand, die Zerlegung der sämtlichen Ideale eines Stiemkeschen Körpers vollkommen zu übersehen; insbesondere erhalten wir den Satz: In einem Stiemkeschen Körper ist dann und nur dann das Ideal $\mathfrak{b}$ Faktor des Ideals $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$), wenn jede Primärkomponente von $\mathfrak{b}$ Faktor der entsprechenden Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ ist. — In einem nicht-Stiemkeschen Körper dagegen kann man stets zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ so finden, daß $\mathfrak{b}$ keinen Faktor von $\mathfrak{a}$ darstellt, obwohl jede Primärkomponente von $\mathfrak{b}$ Faktor der entsprechenden Komponente von $\mathfrak{a}$ ist. In allgemeinsten Zahlkörpern kann daher nur die Theorie der zu einem festen Primideal gehörigen Primärideale als abgeschlossen gelten. Beim Übergang zu beliebigen Idealen stoßen wir auf neuartige unerledigte Fragestellungen.

§ 1.

Die Primärkomponenten der Ideale eines beliebigen Ringes aus algebraischen Zahlen.

Für Ringe (Ordnungen im Sinne von Dedekind) und Körper werden große, für Ideale und Moduln kleine deutsche Buchstaben verwandt. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ bezeichnet den größten gemeinschaftlichen Teiler, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache, das Produkt zweier Ideale oder Moduln, $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$ bedeutet die Teilbarkeit von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$. — Das Nullideal wird im folgenden von der Betrachtung ausgeschlossen, unter $\mathfrak{o}$ verstehen wir stets das Einheitsideal, unter $\mathfrak{p}$ ein Primideal, d. h. ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Ideal, das gleichzeitig mit dem Produkt zweier Elemente stets auch mindestens einen Faktor enthält.

Gegenstand der Untersuchung ist ein unendlicher algebraischer Zahlkörper $\mathfrak{K}$ und seine Unterringe, Haupthilfsmittel sind die Begriffe der „Fundamentalfolgen“ [4]) von Körpern, Ringen und Idealen.

Unter einer zu $\mathfrak{K}$ gehörigen *„Körperfolge“* $\{\mathfrak{K}_i\}$ verstehen wir eine der Gleichung $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0 + \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \ldots$ genügende Folge, bei der $\mathfrak{K}_0$ den Körper der rationalen Zahlen, und $\mathfrak{K}_{i+1}$ jeweils eine endliche algebraische Erweiterung von $\mathfrak{K}_i$ darstellt.

Unter einer zur Körperfolge $\{\mathfrak{K}_i\}$ gehörigen *„Ringfolge“* $\{\mathfrak{R}_i\}$ verstehen wir eine Folge, bei der $\mathfrak{R}_i$ stets einen Ring mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}_i$, d. h. einen in $\mathfrak{K}_i$, aber in keinem echten Unterkörper von $\mathfrak{K}_i$ enthaltenen Ring darstellt, und bei der allgemein die Gleichung $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}_{i+1} \cap \mathfrak{K}_i$ gilt.

Unter einer zur Ringfolge $\{\mathfrak{R}_i\}$ gehörigen *„Idealfolge“* $\{\mathfrak{a}_i\}$ verstehen wir eine Folge, bei der $\mathfrak{a}_i$ stets ein (ganzes) Ideal aus $\mathfrak{R}_i$ darstellt und allgemein die Gleichung $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_{i+1} \cap \mathfrak{R}_i$ gilt.

In Zukunft soll eine feste Körperfolge $\{\mathfrak{K}_i\}$ zugrunde gelegt sein, der alle auftretenden Ringfolgen entnommen werden.

Satz 1. *Die Ringe mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ entsprechen eindeutig umkehrbar den Ringfolgen $\{\mathfrak{R}_i\}$. Der Zusammenhang wird dadurch hergestellt, daß man jeder Ringfolge $\{\mathfrak{R}_i\}$ den Ring $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 \ldots$, jedem Ringe $\mathfrak{R}$ die Ringfolge $\{\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{K}_i\}$ zuordnet.*

Satz 2. *Die Ideale des Ringes $\mathfrak{R}$ entsprechen eindeutig umkehrbar den zu $\{\mathfrak{R}_i\}$ gehörigen Idealfolgen $\{\mathfrak{a}_i\}$. Der Zusammenhang wird dadurch hergestellt, daß man jeder Idealfolge $\{\mathfrak{a}_i\}$ das Ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots$ aus $\mathfrak{R}$, jedem Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ die Idealfolge $\{\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{R}_i\}$ zuordnet.*

$\mathfrak{a}$ ist dann und nur dann Primideal in $\mathfrak{R}$, wenn jedes $\mathfrak{a}_i$ Primideal in $\mathfrak{R}_i$ ist.

Die Beweise von Satz 1 und Satz 2 ergeben sich mühelos aus den Definitionen.

Satz 3. *Jedes von $\mathfrak{o}$ verschiedene Ideal aus $\mathfrak{R}$ ist durch mindestens ein Primideal teilbar.*

Kein Primideal aus $\mathfrak{R}$ besitzt einen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Teiler.

Die Behauptung folgt aus Satz 2 sowie aus der Tatsache, daß sie für jeden Unterring eines endlichen algebraischen Zahlkörpers, also für jeden $\mathfrak{R}_i$ richtig ist [5]).

---

[4]) Zum Begriff der Körper- und Idealfolge sowie zu Satz 2 vgl. St. Kap. 2 S. 16 f.

[5]) Vgl. St. Kap. 2 S. 20 f., wo allerdings das Primideal als Ideal ohne echten Teiler $\neq \mathfrak{o}$ eingeführt ist. — Die Tatsache, daß Satz 3 in beliebigen, auch nicht-ganzzahligen Unterringen eines endlichen Zahlkörpers gilt, folgt aus einer demnächst in

(Fortsetzung der Fußnote 5 auf nächster Seite.)

Ein Ideal $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{R}$, das nur durch ein einziges Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar ist, soll „*zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal*“ heißen. Das Ideal $\mathfrak{q}$ mit der Idealfolge $\{\mathfrak{q}_i\}$ ist offenbar dann und nur dann ein zum Primideal $\mathfrak{p}$ mit der Idealfolge $\{\mathfrak{p}_i\}$ gehöriges Primärideal, wenn (für jedes i) $\mathfrak{q}_i$ in $\mathfrak{R}_i$ durch $\mathfrak{p}_i$, aber durch kein von $\mathfrak{p}_i$ verschiedenes Primideal teilbar, d. h. ein zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal ist.

In einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ gehen i. a. unendlich viele, und zwar nicht-abzählbar unendlich viele Primideale auf[6]). An eine Produktdarstellung eines beliebigen Ideals durch Primärkomponenten ist daher nicht zu denken, wohl aber ist eine kleinste-gemeinschaftliche-Vielfachendarstellung möglich, wie jetzt mit Hilfe des Begriffes des „*zu einem Primideal* $\mathfrak{p}$ *gehörigen Punktringes* $\mathfrak{P}$“ [7]) gezeigt werden soll.

Der zu $\mathfrak{p}$ gehörige Punktring $\mathfrak{P}$ wird aus der Gesamtheit derjenigen Elemente von $\mathfrak{K}$ gebildet, die sich als Quotienten von Elementen aus $\mathfrak{R}$ mit zu $\mathfrak{p}$ teilerfremdem Nenner schreiben lassen. Ist $\{\mathfrak{P}_i\}$ die zu $\mathfrak{P}$ gehörige Ringfolge, so besteht $\mathfrak{P}_i$ offenbar aus allen den Elementen von $\mathfrak{K}_i$, die eine Quotientendarstellung mit zu $\mathfrak{p}_i$ teilerfremdem Nenner besitzen, d. h. es ist $\mathfrak{P}_i$ der zu $\mathfrak{p}_i$ in $\mathfrak{K}_i$ gehörige Punktring, wobei $\{\mathfrak{p}_i\}$ die $\mathfrak{p}$ definierende Idealfolge bedeutet.

Um den Zusammenhang zwischen den Idealen aus $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$ bequem feststellen zu können, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Das zu dem Ideal $\mathfrak{a}^{(r)}$ aus $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{a}^{(\mathfrak{p})}$ aus $\mathfrak{P}$ gehörige Ideal $\mathfrak{a}^{(r)} \cdot \mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{a}^{(\mathfrak{p})} \cap \mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{R}$ möge „*Erweiterungsideal von* $\mathfrak{a}^{(r)}$“ bzw. „*Verengungsideal von* $\mathfrak{a}^{(\mathfrak{p})}$“ heißen. Unter dem zu dem Ideal $\mathfrak{a}^{(r)}$ aus $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{a}^{(\mathfrak{p})}$ aus $\mathfrak{P}$ gehörigen „*Zurückleitungsideal*“ [8]) $\bar{\mathfrak{a}}^{(r)}$ bzw. $\bar{\mathfrak{a}}^{(\mathfrak{p})}$ möge das Ideal $(\mathfrak{a}^{(r)} \cdot \mathfrak{P}) \cap \mathfrak{R}$ aus $\mathfrak{R}$ bzw. $(\mathfrak{a}^{(\mathfrak{p})} \cap \mathfrak{R}) \cdot \mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{P}$ verstanden werden. Das Zurückleitungsideal von $\mathfrak{a}^{(r)}$ ist offenbar ein Teiler von $\mathfrak{a}^{(r)}$, dasjenige von $\mathfrak{a}^{(\mathfrak{p})}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{a}^{(\mathfrak{p})}$.

Bedeutet $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus $\mathfrak{R}$ mit der zugehörigen Idealfolge $\{\mathfrak{a}_i\}$, so ist jedes Element α von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{P}$ in einem der Ideale $\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{P}_i$ enthalten, weil α

---

den Math. Annalen erscheinenden Arbeit des Verfassers: „Zur Theorie der allgemeinen Zahlringe“, die in Zukunft mit „K.“ zitiert werden soll. (Vgl. insbesondere den Schluß von § 3.)

Zusatz bei der Korrektur. Die angeführte Arbeit ist inzwischen erschienen: Math. Annalen **99**, S. 51—70.

[6]) Vgl. St. Kap. 4.

[7]) Über die Punktringe bei endlichen Zahlkörpern vgl. K. § 2 sowie den § 2 der Arbeit: „Zur Theorie der Ordnungen in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern“ von H. Grell, Math. Annalen **37** (1927), S. 524—559.

[8]) Wo zum besseren Verständnis eine genauere Unterscheidung wünschenswert ist, reden wir vom „Zurückleitungsideal von $\mathfrak{a}^{(r)}$ *hinsichtlich* $\mathfrak{P}$“ usw.

eine endliche Summendarstellung der Form $\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot p_k$ (a_k aus $\mathfrak{a}$, p_k aus $\mathfrak{P}$) besitzt; es gilt daher die Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{P}_0 + \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{P}_2 + \cdots$, und daraus folgt weiter:

Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{P}$ mit der Idealfolge $\{\mathfrak{a}_i\}$ und dem Zurückleitungsideal $\bar{\mathfrak{a}}$ und bedeutet $\bar{\mathfrak{a}}_i$ das Zurückleitungsideal von $\mathfrak{a}_i$ in $\mathfrak{R}_i$, so ist $\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{a}}_0 + \bar{\mathfrak{a}}_1 + \bar{\mathfrak{a}}_2 + \cdots$.

Satz 4. *Das Zurückleitungsideal $\bar{\mathfrak{a}}^{(p)}$ eines Ideals $\mathfrak{a}^{(p)}$ aus $\mathfrak{P}$ ist stets mit $\mathfrak{a}^{(p)}$ identisch.*

Das Zurückleitungsideal $\bar{\mathfrak{a}}^{(r)}$ eines Ideals $\mathfrak{a}^{(r)}$ aus $\mathfrak{R}$ ist gleich $\mathfrak{o}$ oder gleich einem zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideal und dann und nur dann mit $\mathfrak{a}^{(r)}$ identisch, wenn $\mathfrak{a}^{(r)}$ selbst das Einheitsideal oder ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal darstellt.

Der Satz ist nach bekannten Ergebnissen über endliche algebraische Zahlkörper sicher richtig, wenn wir es statt mit $\mathfrak{a}^{(p)}$ bzw. $\mathfrak{a}^{(r)}$ mit den zugehörigen Idealen $\mathfrak{a}_i^{(p)}$ und $\mathfrak{a}_i^{(r)}$ aus $\mathfrak{R}_i$ zu tun haben [7]). Aus dieser Tatsache erkennt man sofort die Gültigkeit des Satzes für $\mathfrak{a}^{(p)}$ und $\mathfrak{a}^{(r)}$, sofern man nur die Bemerkungen beachtet, die oben über die Bildung des Zurückleitungsideals sowie über die Charakterisierung der Primärideale durch die Glieder der zugehörigen Idealfolgen gemacht wurden.

Satz 4 zeigt, daß zwischen den sämtlichen Idealen aus $\mathfrak{P}$ und den zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primäridealen aus $\mathfrak{R}$ eine eindeutige, hinsichtlich der Teilbarkeitsverhältnisse und der Multiplikation isomorphe Beziehung hergestellt wird, wenn man jedem zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideal aus $\mathfrak{R}$ sein Erweiterungsideal, jedem Ideal aus $\mathfrak{P}$ sein Verengungsideal zuordnet [9]). *Statt der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale aus $\mathfrak{R}$ kann man daher ebensogut die Gesamtheit der Ideale aus $\mathfrak{P}$ untersuchen.*

Das Zurückleitungsideal von $\mathfrak{a}$ hinsichtlich $\mathfrak{P}$ soll — gleichgültig ob gleich $\mathfrak{o}$ oder nicht — als die „*zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente von $\mathfrak{a}$*“ bezeichnet werden, so daß also ein beliebiges Ideal hinsichtlich jedes Primideals eine Primärkomponente besitzt.

Ist $\mathfrak{q}$ irgendein in $\mathfrak{a}$ aufgehendes zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so ist $\mathfrak{q}$ als Zurückleitung von sich selbst hinsichtlich $\mathfrak{P}$ ein Teiler der Zurückleitung von $\mathfrak{a}$ hinsichtlich $\mathfrak{P}$, d. h. es gilt der Satz:

Die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale, die Teiler von $\mathfrak{a}$ sind.

---

[9]) Zur ausführlichen Behandlung dieser Zuordnung vgl. H. Grell, „Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe“, Math. Annalen **97** (1927), S. 490—523, § 3.

Satz 5. *Jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ *ist gleich dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen seiner sämtlichen Primärkomponenten.*

Zum Beweise ist nur zu zeigen, daß ein Element a, das in sämtlichen Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$ vorkommt, auch in $\mathfrak{a}$ selbst auftritt. Als Element der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ besitzt a die Gestalt $a = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot p_k$ (a_k aus $\mathfrak{a}$, p_k aus $\mathfrak{P}$), es gibt daher nach Definition von $\mathfrak{P}$ ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element $b^{(p)}$ aus $\mathfrak{R}$, derart, daß $b^{(p)} \cdot p_k$ für jedes k in $\mathfrak{R}$ und mithin $a \cdot b^{(p)}$ in $\mathfrak{a}$ enthalten ist. Daraus folgt, daß der Quotient $\mathfrak{a} : (a)$, der aus allen den Elementen von $\mathfrak{R}$ besteht, deren Produkt mit a in $\mathfrak{a}$ vorkommt, durch kein einziges Primideal teilbar sein kann, wir haben also nach Satz 3: $\mathfrak{a} : (a) = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{o} \cdot (a) = (a) \geqq \mathfrak{a}$, d. h. es ist a Element von $\mathfrak{a}$.

§ 2.

Die Ringe $\mathfrak{P}^*$ und ihre Idealgruppen.

Die wichtigste Anwendung der Ergebnisse von § 1 betrifft die „Hauptordnung", d. h. den Fall, daß $\mathfrak{R}^*$ aus allen ganzen Zahlen von $\mathfrak{K}$ und mithin der Ring $\mathfrak{R}_i^*$ der zugehörigen Ringfolge aus allen ganzen Zahlen von $\mathfrak{K}_i$ besteht. Es soll gezeigt werden, daß die Primärideale eines festen Primideals $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}^*$ in der in der Einleitung angegebenen einfachen Weise charakterisiert werden können. Bei der Durchführung der Untersuchung gehen wir, gestützt auf Satz 4 und seine Folgerungen, von $\mathfrak{R}^*$ zu dem zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Punktring $\mathfrak{P}^*$ über und verallgemeinern die Problemstellung insofern, als wir nicht nur die in § 1 allein in Betracht gezogenen ganzen, sondern auch die sämtlichen *gebrochenen Ideale* von $\mathfrak{P}^*$ bestimmen. Unter einem gebrochenen Ideal von $\mathfrak{P}^*$ verstehen wir dabei einen von $\mathfrak{K}$ selbst verschiedenen $\mathfrak{P}^*$-Modul aus $\mathfrak{K}$, dessen Idealfolgen aus gebrochenen Idealen (endlichen $\mathfrak{P}_i^*$-Moduln) bestehen.

Hilfssatz. *Es sei* $\mathfrak{K}_e$ *ein endlicher algebraischer Zahlkörper,* $\mathfrak{P}_e^*$ *ein zum Ring* $\mathfrak{R}_e^*$ *aller ganzen Zahlen von* $\mathfrak{K}_e$ *gehöriger Punktring. Dann besitzt jedes ganze oder gebrochene Ideal von* $\mathfrak{P}_e^*$ *die Gestalt* $\mathfrak{p}_e^n$, *wobei* $\mathfrak{p}_e$ *das Primideal aus* $\mathfrak{P}_e^*$ *und* n *eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet*[10]).

Jedes Element aus $\mathfrak{K}_e$ läßt sich in der Form $a = \varepsilon \cdot p^n$ darstellen, wenn p ein festes, durch $\mathfrak{p}_e$, aber nicht durch $\mathfrak{p}_e^2$ teilbares Element, ε eine beliebige Einheit aus $\mathfrak{P}_e^*$ bedeutet[11]). Daraus ergibt sich unmittelbar der

---

[10]) Unter $\mathfrak{p}^{-n}$ verstehen wir den Modul $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}^n}$, d. h. die Gesamtheit der Elemente aus $\mathfrak{K}$, deren Produkt mit einem beliebigen Element von $\mathfrak{p}^n$ in $\mathfrak{P}^*$ enthalten ist.

[11]) Vgl. K. § 3.

Beweis. Es bleibt zu zeigen, wie auf Grund des Hilfssatzes der Fall des unendlichen algebraischen Körpers $\mathfrak{K}$ erledigt werden kann.

$\mathfrak{q}$ sei ein beliebiges (ganzes oder gebrochenes), $\mathfrak{p}$ sei das Primideal von $\mathfrak{P}_e^*$, $\{\mathfrak{q}_i\}$ und $\{\mathfrak{p}_i\}$ seien die zugehörigen Idealfolgen. Nach dem Hilfssatz gelten für jedes i die Gleichungen

$$(1) \qquad \mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{z_i}; \qquad \mathfrak{p}_{i-1} \cdot \mathfrak{P}_i^* = \mathfrak{p}_i^{r_i}; \qquad \mathfrak{p}_0 \cdot \mathfrak{P}_i^* = \mathfrak{p}_i^{r_1 \cdot r_2 \cdots r_n} = \mathfrak{p}_i^{n_i}.$$

Dabei sind die r_i ganze positive Zahlen, die z_i sind $\geqq 0$ oder $\leqq 0$, je nachdem ob $\mathfrak{q}$ ein ganzes Ideal ist oder nicht. Die z_i wachsen i. a. mit i ins Unendliche, liefern also keinen zur Charakterisierung von $\mathfrak{q}$ geeigneten Grenzwert. Für die rationalen Zahlen $\frac{z_i}{n_i}$ dagegen gelten die Ungleichungen

$$(2) \qquad \frac{z_{i-1}}{n_{i-1}} \geqq \frac{z_i}{n_i} > \frac{z_{i-1}-1}{n_i},$$

wie unmittelbar aus der Tatsache erschlossen werden kann, daß $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{z_i}$ gerade das der Gleichung $\mathfrak{q}_{i-1}\mathfrak{P}_i^* = \mathfrak{p}^{z_{i-1}\frac{n_i}{n_{i-1}}}$ genügende Ideal $\mathfrak{q}_{i-1}$ als Durchschnitt mit $\mathfrak{K}_{i-1}$ besitzen muß. Nach (2) ist die Folge $\frac{z_i}{n_i}$ monoton abnehmend und nach unten beschränkt, sie muß daher einen endlichen Grenzwert α besitzen, der als der *Wert*[12]) von $\mathfrak{q}$ bezeichnet werden soll.

Satz 6. *Der Wert eines Ideals aus $\mathfrak{P}^*$ ist unabhängig von der Körperfolge $\{\mathfrak{K}_i\}$, mit deren Hilfe er eingeführt wurde, sofern nur an der Voraussetzung festgehalten wird, daß $\mathfrak{K}_0$ der Körper der rationalen Zahlen sein soll.*

Es seien $\frac{z_i}{n_i}$ und $\frac{z_i'}{n_i'}$ die Zahlenfolgen, die wir mit Hilfe der Körperfolgen $\{\mathfrak{K}_i\}$ und $\{\mathfrak{K}_i'\}$ zur Bestimmung des Wertes von $\mathfrak{q}$ erhalten ($\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}_0'$!). Da $\mathfrak{K}_i$ ein endlicher, in $\mathfrak{K}_0' + \mathfrak{K}_1' + \mathfrak{K}_2' + \ldots = \mathfrak{K}$ enthaltener Zahlkörper ist, muß es zu jedem i ein $k(i)$ geben, derart, daß $\mathfrak{K}_i$ bereits einen Unterkörper von $\mathfrak{K}_k'$ darstellt. Es ist dann $\frac{z_k'}{n_k'} \leqq \frac{z_i}{n_i}$, wie man auf Grund derselben Schlüsse erkennt, wie sie oben zu der Ungleichung $\frac{z_i}{n_i} \leqq \frac{z_{i-1}}{n_{i-1}}$ führten. Die Folge $\frac{z_i}{n_i}$ liefert also sicher keinen kleineren Grenzwert als die Folge $\frac{z_i'}{n_i'}$, und da die Betrachtung umkehrbar ist, müssen die Folgen $\frac{z_i}{n_i}$ und $\frac{z_i'}{n_i'}$ notwendig denselben Grenzwert erzeugen.

Der Wert des Ideals $\mathfrak{q}$ soll in Zukunft symbolisch mit $w_\mathfrak{q}$ bezeichnet werden. Offenbar ist $\mathfrak{q}_1 \geqq \mathfrak{q}_2$ dann und nur dann, wenn $w_{\mathfrak{q}_1} \geqq w_{\mathfrak{q}_2}$. Es

[12]) Zu dieser Einführung des Wertes vgl. die Entwicklungen von St. Kap. 4 S. 33, wo sich bereits die Ungleichungen (2) finden.

fragt sich aber, wieviel verschiedene Ideale zu einem gegebenen Wert w gehören.

Bei der Beantwortung dieser Frage sind zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Einmal kann es vorkommen, daß von einem endlichen i an $r_{i+1} = r_{i+2} = r_{i+3} = \ldots = 1$, $n_i = n_{i+2} = n_{i+3} = \ldots$, und mithin $\frac{z_i}{n_i} = \frac{z_{i+1}}{n_{i+1}} = \frac{z_{i+2}}{n_{i+2}} = \ldots$ wird. Hier haben wir $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i \cdot \mathfrak{P}^*$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_i^{z_i} \cdot \mathfrak{P}^* = (\mathfrak{p}_i \cdot \mathfrak{P}^*)^{z_i} = \mathfrak{p}^{z_i}$, jedes Ideal aus $\mathfrak{P}^*$ stellt wie bei endlichen Körpern eine Potenz des Ringprimideals dar und ist durch seinen Wert, aber auch durch seinen Exponenten eindeutig bestimmt. Der Fall bringt nichts Neues, die Einführung des Wertes ist überflüssig.

Wir wenden uns daher für den Schluß des Paragraphen ausschließlich der Untersuchung der andern Möglichkeit $\lim r_i > 1$, $\lim n_i = +\infty$ zu. Hier ist das Problem des Zusammenhangs zwischen Wert und Primärideal gleichwertig mit der folgenden Frage:

Es sei $r_1, r_2, r_3, \ldots$ eine Folge ganzer positiver Zahlen, in der unendlich viele Glieder von 1 verschieden sind, $n_i = r_1 \cdot r_2 \ldots r_i$. Auf wieviel Weisen kann man eine beliebige reelle Zahl als Grenzwert einer Folge $\frac{z_i}{r_1 \cdot r_2 \ldots r_i}$ darstellen, bei der die z_i ganze positive oder negative Zahlen sind, die den Ungleichungen $\frac{z_{i-1}}{n_{i-1}} \geqq \frac{z_i}{n_i} > \frac{z_{i-1}-1}{n_{i-1}}$ genügen?

Die Antwort lautet bekanntlich: Ist w eine irrationale Zahl oder eine rationale Zahl, deren Nenner bei gekürzter Darstellung in keinem n_i aufgeht, so gibt es nur eine einzige Folge $\frac{z_i}{n_i}$ mit $\lim \frac{z_i}{n_i} = w$. Ist aber w rational und geht der Nenner von w in einem n_i auf, so existieren zwei Folgen $\frac{z_i}{n_i}$; in der einen ist stets $\frac{z_i}{n_i} > w$, in der andern wird von einem endlichen i an $\frac{z_i}{n_i} = \frac{z_{i+1}}{n_{i+1}} = \frac{z_{i+2}}{n_{i+2}} = \ldots = w$.

Ein Ideal $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{P}^*$ möge endlich oder unendlich heißen, je nachdem ob $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{P}^*$ eine endliche Basis besitzt oder nicht. $\mathfrak{q}$ ist offenbar dann und nur dann endlich, wenn für genügend großes i die Gleichung $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_i \cdot \mathfrak{P}^*$ gilt, und dafür ist wieder notwendig und hinreichend, daß in der zu $\mathfrak{q}$ gehörigen Folge $\frac{z_i}{n_i}$ von einem gewissen i an $\frac{z_i}{n_i} = \frac{z_{i+1}}{n_{i+1}} = \frac{z_{i+2}}{n_{i+2}} = \ldots = w_\mathfrak{q}$ wird.

Wir können daher zusammenfassend über den Zusammenhang zwischen Wert und Ideal in $\mathfrak{P}^*$ den folgenden Satz aufstellen:

Satz 7. *Ist die reelle Zahl w irrational oder ist w rational und geht der Nenner von w bei gekürzter Darstellung in keiner der Zahlen n_i auf, so gibt es in $\mathfrak{P}^*$ nur ein einziges, und zwar unendliches Ideal vom*

Werte w. Ist aber w rational und geht der Nenner von w in einem n_i auf, so gibt es zwei Ideale vom Werte w, ein endliches und ein unendliches; dabei ist das endliche Ideal Teiler des unendlichen.

Die beiden Ideale vom Werte 0 sind das Einheitsideal als endliches und das Primideal $\mathfrak{p}$ als unendliches Ideal. Das Primideal spielt also hier eine ganz andere Rolle als beim endlichen Zahlkörper oder bei dem oben kurz erledigten Falle, der wesentlich dadurch charakterisiert war, daß $\mathfrak{p}$ selbst ein endliches Ideal darstellte.

Satz 8. *Der Wert des Produktes ist gleich der Summe der Werte der Faktoren. Das Produkt ist dann und nur dann endlich, wenn sämtliche Faktoren endlich sind.*

Es sei $\mathfrak{q}^{(0)} = \mathfrak{q}^{(1)} \cdot \mathfrak{q}^{(2)}$, $\{\mathfrak{q}_i^{(k)}\}$ bzw. $\frac{z_i^{(k)}}{n_i}$ sei die zu $\mathfrak{q}^{(k)}$ gehörige Ideal- bzw. Zahlenfolge, $w^{(k)} = \lim \frac{z_i^{(k)}}{n_i}$ sei der Wert von $\mathfrak{q}^{(k)}$. Dann ist $\mathfrak{q}_i^{(1)} \cdot \mathfrak{q}_i^{(2)} \geqq \mathfrak{q}_i^{(0)}$, mithin $\frac{z_i^{(1)} + z_i^{(2)}}{n_i} \geqq \frac{z_i^{(0)}}{n_i}$. Anderseits gibt es wegen der Endlichkeit des durch $\mathfrak{q}_0^{(1)} \cdot \mathfrak{q}_0^{(2)} + \mathfrak{q}_1^{(1)} \cdot \mathfrak{q}_1^{(2)} + \mathfrak{q}_2^{(1)} \cdot \mathfrak{q}_2^{(2)} + \ldots$ teilbaren Ideals $\mathfrak{q}_i^{(0)} \cdot \mathfrak{P}^*$ zu jedem i ein $l(i)$, derart, daß $\mathfrak{q}_i^{(0)}$ in $\mathfrak{q}_l^{(1)} \cdot \mathfrak{q}_l^{(2)}$ enthalten ist, also $\frac{z_i^{(0)}}{n_i} \geqq \frac{z_l^{(1)} \cdot z_l^{(2)}}{n_l}$ ausfällt. Daraus folgt sofort

$$w^{(0)} = \lim \frac{z_i^{(0)}}{n_i} = \lim \frac{z_i^{(1)}}{n_i} + \lim \frac{z_i^{(2)}}{n_i} = w^{(1)} + w^{(2)}.$$

Sind ferner $\mathfrak{q}^{(1)}$ und $\mathfrak{q}^{(2)}$ beide endlich, so wird für ein gewisses i $\mathfrak{q}^{(1)} = \mathfrak{q}_i^{(1)} \cdot \mathfrak{P}^*$, $\mathfrak{q}^{(2)} = \mathfrak{q}_i^{(2)} \cdot \mathfrak{P}^*$, $\mathfrak{q}^{(0)} = \mathfrak{q}_i^{(1)} \cdot \mathfrak{P}^* \cdot \mathfrak{q}_i^{(2)} \cdot \mathfrak{P}^* = (\mathfrak{q}_i^{(1)} \cdot \mathfrak{q}_i^{(2)}) \cdot \mathfrak{P}^*$, es ist also auch $\mathfrak{q}^{(0)}$ endlich. Kommt schließlich unter den Faktoren $\mathfrak{q}^{(1)}$ und $\mathfrak{q}^{(2)}$ ein unendlicher vor, etwa $\mathfrak{q}^{(1)}$, so ist für jedes i: $\frac{z_i^{(1)}}{n_i} > w^{(1)}$, mithin $\frac{z_i^{(1)} + z_i^{(2)}}{n_i} > w^{(1)} + w^{(2)}$, $\frac{z_i^{(0)}}{n_i} \geqq \frac{z_i^{(1)} + z_i^{(2)}}{n_i} > w^{(1)} + w^{(2)} = w^{(0)}$, d. h. $\mathfrak{q}^{(0)}$ ist nach Satz 6 gleichzeitig mit einem beliebigen seiner Faktoren unendlich.

Satz 8 zeigte, daß es Ideale in $\mathfrak{P}^*$ gibt, die auch bei Zulassung gebrochener Ideale nicht durch Multiplikation wechselseitig ineinander übergeführt werden können, und daß im Bereich der ganzen Ideale von $\mathfrak{P}^*$ nicht notwendig aus Teilbarkeit Produktdarstellung folgt.

Satz 9. *Die unendlichen Ideale aus $\mathfrak{P}^*$ bilden (hinsichtlich der Multiplikation) eine Gruppe G_n mit dem Einheitselement $\mathfrak{p}$, die endlichen Ideale bilden eine Gruppe G_e mit dem Einheitselement $\mathfrak{o}$.*

G_n ist isomorph zur Additionsgruppe der reellen Zahlen, G_e ist isomorph zur Additionsgruppe einer (die ganzen Zahlen enthaltenden) Untergruppe der rationalen Zahlen. Der Zusammenhang zwischen G_n und G_e

wird hergestellt durch die Multiplikationsregel endlich $\times$ endlich = endlich; endlich $\times$ unendlich = unendlich $\times$ unendlich = unendlich.

Satz 9 ist im wesentlichen eine andere Fassung von Satz 8, die aber vielleicht den Kern des gewonnenen Ergebnisses schärfer hervortreten läßt. Ist im Spezialfall $\mathfrak{K}$ der Körper aller algebraischen Zahlen, so weiß man, daß in $\mathfrak{P}^*$ das Primideal $\mathfrak{p}$ unendlich ist, und daß es zu jeder ganzen Zahl n ein durch n teilbares n_i gibt[13]) (n_i in derselben Bedeutung gebraucht wie bisher).

In einem zum Körper $\mathfrak{K}^*$ aller algebraischen Zahlen gehörigen $\mathfrak{P}^*$ liegt also immer der in Satz 7—9 behandelte Fall vor, und es wird die Gruppe G_e stets isomorph zur vollen Additionsgruppe der rationalen Zahlen.

§ 3.

Primärideale und beliebige Ideale in der Hauptordnung.

Die Ergebnisse von § 2 sollen jetzt auf die Theorie der *ganzen* Ideale aus der Hauptordnung $\mathfrak{R}^*$ angewandt werden.

Unter dem Wert des Primärideals $\mathfrak{q}$ mit dem zugehörigen Primideal $\mathfrak{p}$ und dem Punktring $\mathfrak{P}^*$ verstehen wir den Wert von $\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{P}^*$ in $\mathfrak{P}^*$, $\mathfrak{q}$ soll endlich oder unendlich heißen, je nachdem ob $\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{P}^*$ definitionsgemäß in $\mathfrak{P}^*$ endlich oder unendlich ist.

Wir können dann, gestützt auf Satz 4 nebst Folgerungen, die Ergebnisse von § 2 auf die zu einem festen Primideal $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale aus $\mathfrak{R}^*$ übertragen, wobei nur zu beachten ist, daß bei der Beschränkung auf ganze Ideale der Wert eines Primärideals nie negativ sein kann.

Damit ist die Frage nach dem Bau der Primärideale in $\mathfrak{R}^*$ völlig geklärt, insbesondere erhalten wir den Satz:

Ein unendliches Primärideal aus $\mathfrak{R}^*$ besitzt alle, ein endliches Primärideal nur alle endlichen Primärideale mit gleichem zugehörigen Primideal und von nicht höherem Wert als Faktor.

Über endliche Primärideale aus $\mathfrak{R}^*$ ist noch folgendes zu bemerken:

Ein nach unserer Definition endliches Primärideal braucht in $\mathfrak{R}^*$ keine endliche Idealbasis zu besitzen. Im Ring aller ganzen algebraischen Zahlen z. B. hat jedes Ideal mit endlicher Basis unendlich viele Primidealteiler[14]), es gibt also dort überhaupt keine Primärideale mit endlicher

[13]) Weil man — in der unpräzisen Ausdrucksweise der Einleitung gesprochen — zu jedem endlichen Zählkörper $\mathfrak{k}_e$ einen endlichen Erweiterungskörper $\bar{\mathfrak{k}}_e$ finden kann, derart, daß ein beliebiges vorgegebenes Ideal aus $\mathfrak{k}_e$ in $\bar{\mathfrak{k}}_e$ zur ϱ-ten Potenz eines Ideals mit beliebig vorgegebenem ϱ wird.

[14]) Vgl. St. Kap. 4 S. 31 f.

Basis. Dagegen lassen sich die endlichen Primärideale aus $\mathfrak{R}^*$ folgendermaßen charakterisieren:

Ein Primärideal $\mathfrak{q}$ *aus* $\mathfrak{R}^*$ *ist dann und nur dann endlich, wenn es Primärkomponente eines Ideals* $\mathfrak{a}$ *mit endlicher Basis ist.*

Es sei $\mathfrak{q}$ ein endliches Primärideal aus $\mathfrak{R}^*$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ sei eine endliche Basis von $\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{P}^*$ in $\mathfrak{P}^*$; bestimmen wir dann ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element b aus $\mathfrak{R}^*$ so, daß die Elemente $b\cdot\alpha_i = a_i$ sämtlich zu $\mathfrak{R}^*$ gehören, so besitzt das Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}^*$ mit der Basis $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ gerade $\mathfrak{q}$ als Primärkomponente. Ist anderseits $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}^*$, so ist $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ auch eine Basis von $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{P}^*$ in $\mathfrak{P}^*$, es ist also gleichzeitig mit $\mathfrak{a}$ jede Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ endlich.

Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung der Teilbarkeits- und Multiplikationsverhältnisse bei beliebigen Idealen. Daß $\mathfrak{a}$ dann und nur dann durch $\mathfrak{b}$ teilbar ist, wenn jede Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ durch die entsprechende von $\mathfrak{b}$ teilbar ist, folgt aus Satz 5. Aus der Tatsache, daß die zu einem bestimmten Primideal gehörige Primärkomponente des Produktes $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ wegen $(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{P}^*)\cdot(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{P}^*) = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{P}^*$ gleich dem Produkt der entsprechenden Primärkomponenten der Faktoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist, ergibt sich weiter:

Satz 10. *Ist* $\mathfrak{b}$ *Faktor von* $\mathfrak{a}$, *so ist auch jede Primärkomponente von* $\mathfrak{b}$ *Faktor der entsprechenden Primärkomponente von* $\mathfrak{a}$.

Satz 10 kann bekanntlich bei endlichen Zahlkörpern umgekehrt werden, bei unendlichen Körpern hingegen ist, wie wir sehen werden, die volle Umkehrung nur im Sonderfall der Stiemkeschen Körper möglich.

Hilfssatz. *Besitzt* $\mathfrak{a}$ *nur endlich viele von* $\mathfrak{o}$ *verschiedene Primärkomponenten* $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n$, *so ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1\cdot\mathfrak{q}_2\cdot\ldots\cdot\mathfrak{q}_n$.

Beweis folgt aus Satz 5 und aus der Tatsache, daß das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von *endlich* viel teilerfremden Idealen gleich dem Produkt dieser Ideale ist.

Satz 11. *Ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *mit nur endlich viel von* $\mathfrak{o}$ *verschiedenen Primärkomponenten besitzt dann und nur dann das Ideal* $\mathfrak{b}$ *als Faktor, wenn jede Primärkomponente von* $\mathfrak{b}$ *Faktor der entsprechenden Primärkomponente von* $\mathfrak{a}$ *ist.*

Es seien $\mathfrak{q}_1^{(a)}, \mathfrak{q}_2^{(a)}, \ldots, \mathfrak{q}_n^{(a)}$ die von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}_1^{(b)}, \mathfrak{q}_2^{(b)}, \ldots, \mathfrak{q}_n^{(b)}$ seien die entsprechenden Primärkomponenten von $\mathfrak{b}$ und es bestehe für jedes i eine Gleichung $\mathfrak{q}_i^{(a)} = \mathfrak{q}_i^{(b)}\cdot\mathfrak{q}_i^{(c)}$. Dann wird nach dem Hilfssatz $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1^{(a)}\cdot\mathfrak{q}_2^{(a)}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{q}_n^{(a)}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1^{(b)}\cdot\mathfrak{q}_2^{(b)}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{q}_n^{(b)}$ und mithin $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}$ für $\mathfrak{c} = \mathfrak{q}_1^{(c)}\cdot\mathfrak{q}_2^{(c)}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{q}_n^{(c)}$.

In einem Stiemkeschen Körper, in dem jedes Ideal nur endlich viel Primidealteiler und folglich auch nur endlich viele von $\mathfrak{o}$ ver-

schiedene Primärkomponenten besitzt, leistet Satz 11 die Umkehrung von Satz 10[15]).

Ist dagegen $\mathfrak{K}$ ein nicht-Stiemkescher Körper, so kann man stets ein Primideal $\mathfrak{p}_0$ aus $\mathfrak{R}_0^*$ und eine unendliche Zahlenfolge $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ so bestimmen, daß ein Gleichungssystem gilt von der Form

$$(3) \quad \mathfrak{p}_0 \cdot \mathfrak{R}_{i_1}^* = \mathfrak{p}_{i_1}^{\varrho_1} \cdot \mathfrak{a}_{i_1}; \quad \mathfrak{p}_{i_1} \cdot \mathfrak{R}_{i_2}^* = \mathfrak{p}_{i_2}^{\varrho_2} \cdot \mathfrak{a}_{i_2}, \quad \mathfrak{p}_{i_2} \cdot \mathfrak{R}_{i_3}^* = \mathfrak{p}_{i_3}^{\varrho_3} \cdot \mathfrak{a}_{i_3}, \ldots;$$

$$\mathfrak{a}_{i_\nu} \neq \mathfrak{o}_{i_\nu}, \quad \mathfrak{p}_{i_\nu} + \mathfrak{a}_{i_\nu} = \mathfrak{o}_{i_\nu},$$

d. h. daß $\mathfrak{p}_{i_\nu}$ beim Übergang von $\mathfrak{R}_{i_\nu}^*$ zu $\mathfrak{R}_{i_{\nu+1}}^*$ stets in mindestens zwei teilerfremde Primärfaktoren zerfällt[16]). Durch passende Wahl der zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Körperfolge $\{\mathfrak{K}_i\}$ kann man erreichen, daß $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = 3, \ldots$ wird, eine Voraussetzung, von der wir im folgenden der Bequemlichkeit halber Gebrauch machen wollen.

Unter $\mathfrak{p}$ möge das Primideal mit der Idealfolge $\{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\}$ verstanden werden, unter $\mathfrak{p}^{(k)}$ dagegen ein Primideal, dessen Idealfolge mit $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ beginnt, während das folgende Glied $\mathfrak{p}'_{k+1}$ von $\mathfrak{p}_{k+1}$ verschieden ist. (Die Existenz von $\mathfrak{p}^{(k)}$ für jedes k folgt aus der Annahme, daß die Gleichungen (3) mit $i_\nu = \nu$ gelten.)

Bedeutet jetzt $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{q}^{(k)}$ das zu $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}^{(k)}$ gehörige endliche Primärideal vom Werte 1, so ist $\mathfrak{q}$ zu sämtlichen $\mathfrak{q}^{(k)}$ teilerfremd, wohl aber Teiler, ja sogar Primärkomponente von $\mathfrak{q}^{(1)} \cap \mathfrak{q}^{(2)} \cap \mathfrak{q}^{(3)} \cap \ldots = \mathfrak{a}$.

Es sei nämlich $\{\mathfrak{q}_i\}$ bzw. $\{\mathfrak{a}_i\}$ die zu $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{a}$ gehörige Idealfolge; aus der Art der Wahl von $\mathfrak{p}^{(k)}$ und $\mathfrak{q}^{(k)}$ ergeben sich dann die Beziehungen $\mathfrak{a}_i \geqq \mathfrak{q}_i$ und daraus folgt $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{q}$. Da anderseits das durch $\mathfrak{a}$ teilbare Ideal $\mathfrak{p}_0 \cdot \mathfrak{R}^*$ das Ideal $\mathfrak{q}$ als Primärkomponente besitzt, muß $\mathfrak{q}$ auch Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ sein.

$\mathfrak{q}$ kann kein Faktor von $\mathfrak{a}$ sein, obwohl jede Primärkomponente von $\mathfrak{q}$ ($\mathfrak{q}$ selbst ist ja die einzige von $\mathfrak{o}$ verschiedene) Faktor der entsprechenden Komponente von $\mathfrak{a}$ ist. Bedeutet nämlich $\mathfrak{c}$ irgendein der Ungleichung $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{q} \geqq \mathfrak{a}$ genügendes Ideal, so muß $\mathfrak{c}$ wegen $\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^{(k)} = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{q} > \mathfrak{q}^{(k)}$ durch sämtliche Ideale $\mathfrak{q}^{(k)}$ teilbar sein, d. h. wir haben $\mathfrak{c} \geqq \mathfrak{a}$; das Produkt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{q}$ stellt aber sicher ein echtes Vielfaches von $\mathfrak{a}$ dar, weil die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{q}$ gleich $\mathfrak{q}^2$ ist und nicht gleich $\mathfrak{q}$ wie die entsprechende Primärkomponente von $\mathfrak{a}$.

---

[15]) In den Gültigkeitsbereich von Satz 11 fallen insbesondere die „beschränkten Ideale“ mit nur endlich viel Teilern, für die bereits in St. Kap. 3 die Eindeutigkeit der Primärfaktorzerlegung nachgewiesen ist. Ein beschränktes Ideal $\mathfrak{a}$ ist Produkt von Primidealpotenzen, weil jede Primärkomponente $\mathfrak{q}$ eines beschränkten Ideals entweder zu einem Primideal von positivem Wert gehört, oder gleich dem zugehörigen Primideal ist. (Sonst hätte ja $\mathfrak{q}$ und mithin $\mathfrak{a}$ unendlich viele Teiler.)

[16]) Vgl. St. Kap. 4 S. 29.

Das gewonnene Ergebnis möge seiner Wichtigkeit halber ausführlich als Satz formuliert werden:

Satz 12. *In dem zu einem nicht-Stiemkeschen Körper gehörigen* $\Re^*$ *kann man unendlich viele Primärideale finden, die sämtlich zu einem festen Primärideal* $\mathfrak{q}$ *teilerfremd sind, während ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches durch* $\mathfrak{q}$ *teilbar ist. In dem zu einem nicht-Stiemkeschen Körper gehörigen* $\Re^*$ *gibt es stets zwei Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *derart, daß zwar jede Primärkomponente von* $\mathfrak{b}$ *Faktor der entsprechenden Primärkomponente von* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *selbst aber kein Faktor von* $\mathfrak{a}$ *ist.*

Satz 12 zeigt noch, daß ein Ideal mit unendlich vielen Primidealteilern i. a. auf mehrere verschiedene Weisen als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von teilerfremden Primäridealen dargestellt werden kann, z. B. ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}^{(1)} \cap \mathfrak{q}^{(2)} \cap \ldots = \mathfrak{q}^{(1)} \cap \mathfrak{q}^{(2)} \cap \mathfrak{q}^{(3)} \cap \ldots$. Man kann daher auch nicht wie bei endlich viel Komponenten aus der Gültigkeit einer Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}^{(1)} \cap \mathfrak{q}^{(2)} \cap \mathfrak{q}^{(3)} \cap \ldots$ mit unendlich vielen teilerfremden Primäridealen $\mathfrak{q}^{(k)}$ den Schluß ziehen, daß die $\mathfrak{q}^{(k)}$ gerade die (einzigen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen) Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$ im Sinne der Definition von § 1 darstellen müssen.

(Eingegangen am 30. Juli 1927.)

Zur Theorie der nicht orientierbaren Mannigfaltigkeiten.

Von

W. Ephrämowitsch in Moskau.

Eine Mannigfaltigkeit M^{n-1} heißt in M^n zwei- bzw. einseitig eingebettet, je nachdem M^{n-1} wenigstens eine bzw. keine ihrer Umgebungen (in bezug auf M^n) zerlegt.

Aus einem Steinitzschen Satze: „Wenn beim Durchlaufen der Linie l sowohl die Indikatrix von M^{n-1} als auch die von M^n erhalten bleibt, so führt l zur Ausgangsseite zurück. Dasselbe tritt ein, wenn beide Indikatrizen sich umkehren. Wenn dagegen eine von beiden Indikatrizen erhalten bleibt, die andere sich umkehrt, so gelangt man nach Durchlaufen von l auf die entgegengesetzte Seite der M^{n-1}“[1]) folgt, daß in einer orientierbaren M^n jede orientierbare M^{n-1} zweiseitig, jede nicht orientierbare M^{n-1} dagegen einseitig eingebettet ist. In nicht orientierbarer M^n können sowohl orientierbare als auch nicht orientierbare M^{n-1} im allgemeinen auf beide Weisen eingebettet werden.

Folgende Behauptung ist leicht zu beweisen.

I. *In jeder nicht orientierbaren* M^n $(n \geqq 3)$ *ist eine daselbst zweiseitig eingebettete nicht orientierbare* M^{n-1} *enthalten.* In der Tat, um diese M^{n-1} zu gewinnen, genügt es, eine die Indikatrix umkehrende geschlossene Kette von n Zellen eines gewissen kombinatorischen Schema Z^n von M^n zu betrachten; man kann diese Zellen offenbar so wählen, daß ihre Gesamtheit durch eine Mannigfaltigkeit M^{n-1} begrenzt ist. Dann ist M^{n-1} nicht orientierbar (diese M^{n-1} hat die Gestalt des „$n-1$-dimensionalen Kleinschen Schlauches“); andererseits ist M^{n-1} in M^n zweiseitig eingebettet, w. z. b. w.

Der Zweck dieser Arbeit ist, ein zum soeben bewiesenen Satze gewissermaßen duales Resultat festzustellen:

---

[1]) „Beiträge zur Analysis situs“, Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges., 57. Sitzung (1908), S. 36, 37.

II. *In jeder nicht orientierbaren geschlossenen M^n ist wenigstens eine, in M^n einseitig eingebettete orientierbare geschlossene M^{n-1} enthalten.*

Bevor ich zum Beweise der letzteren Tatsache übergehe, möchte ich noch bemerken, daß jede der Eigenschaften I, II für die Nichtorientierbarkeit der geschlossenen Mannigfaltigkeiten charakteristisch ist und also als eine rein mengentheoretische induktive Definition des Begriffes der Nichtorientierbarkeit aufgefaßt werden kann.

Was berandete (in sich kompakte) Mannigfaltigkeiten betrifft, so gilt in ihnen der Satz I ohne weiteres, der Satz II dagegen nimmt folgende modifizierte Gestalt an:

II′. *Es existiert in jeder berandeten nicht orientierbaren kompakten M^n eine daselbst einseitig gelegene ebenfalls berandete orientierbare M^{n-1}, deren Rand im Rande von M^n enthalten ist.*

Der Beweis der beiden Sätze ist II, und II′ läuft durchaus parallel; wir begnügen uns, ihn für den Fall geschlossener M^n zu erbringen.

Es sei endlich noch erwähnt, daß die Anregung zur Lösung des hier behandelten Problems im wesentlichen einer von H. Hopf in Göttingen (Sommer 1926) gehaltenen Vorlesung zu verdanken ist.

Theorem. *In jeder nicht orientierbaren geschlossenen Mannigfaltigkeit M^n ist wenigstens eine daselbst einseitig eingebettete orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit M^{n-1} enthalten.*

1. Zuerst wollen wir zeigen, daß in M^n eine geschlossene Mannigfaltigkeit M^{n-1} existiert, die orientierbar ist und M^n nicht zerlegt.

Dazu wählen wir auf jeder Zelle a^i eines kombinatorischen Schemas Z^n von M^n eine willkürliche Indikatrix. Es sei

$$a_i^n \to {}^n\varepsilon_i^k\, a_k^{n-1},$$

wobei die letzte Formel bedeutet, daß a_i^n durch $\sum_{k=1}^{\alpha_{n-1}} \varepsilon_i^k\, a_k^{n-1}$ begrenzt ist[2]).

Wir nehmen die Summe

$$\lambda^i a_i^n \to \lambda^i \varepsilon_i^k\, a_k^{n-1},$$

wo die Koeffizienten $\lambda^i = \pm 1$ so ausgewählt sind, daß der Komplex $\lambda^i a_i^n$ „zusammenhängend“ ist, d. h. daß man jede zwei Zellen a_k^n und a_l^n mit einer einfachen Kette

$$a_k^n,\ a_{k_1}^n,\ a_{k_2}^n,\ \ldots,\ a_{k_s}^n,\ a_l^n$$

[2]) Diese Bezeichnungsweise rührt von J. W. Alexander (Americ. Trans. 28 (1926), S. 312) her.

verbinden kann, in der jede zwei benachbarten Zellen $a^n_{k_i}$ und $a^n_{k_i+1}$ eine gemeinsame a^{n-1} haben, die nicht dem Komplex $\lambda^i \varepsilon^k_i a^{n-1}_k$ angehört. Die Koeffizienten λ^i können z. B. folgendermaßen bestimmt werden: Es seien zuerst alle $\lambda^i = 1$ gesetzt und es bestehe dabei der Komplex $\lambda^i a^n_i$ aus r „Komponenten" (im Sinne des obigen Zusammenhangsbegriffes). Wenn wir das Zeichen bei sämtlichen λ^i, die n Zellen einer Komponente von $\lambda^i a^n_i$ entsprechen, ändern, so vermindern wir dadurch die Anzahl der Komponenten mindestens um 1. Durch höchstens $r-1$-malige Wiederholung dieses Verfahrens erhalten wir solche λ^i, daß $\lambda^i a^n_i$ zusammenhängend ist.

$\lambda^i a^n_i$ ist ein orientierbarer Komplex; infolgedessen ist seine Grenze $\lambda^i \varepsilon^k_i a^{n-1}_k$ geschlossen und orientierbar.

Da M^n geschlossen ist, so ist

$$\lambda^i \varepsilon^k_i a^{n-1}_k = 2\mu^k a^{n-1}_k; \qquad \mu^k = \pm 1;\ 0,$$

wobei nicht alle μ^k verschwinden (sonst wäre M^n orientierbar). Mithin ist auch $C^{n-1} = \mu^k a^{n-1}_k$ ein orientierbarer geschlossener Komplex, der M^n nicht zerlegt.

Da jede $n-2$-Zelle einer geraden Zahl von $n-1$-Zellen des Komplexes C^{n-1} angehört, und da C^{n-1} die Mannigfaltigkeit M^n nicht zerlegt, so existiert in M^n, wie H. Kneser zeigte[3]), eine geschlossene Mannigfaltigkeit M^{n-1}, die M^n nicht zerlegt; zugleich besteht M^{n-1} aus Elementen eines aus Z^n durch interne Transformation hervorgehenden Schemas. Dabei (da C^{n-1} ein orientierbarer Komplex ist) führt die Knesersche Methode zu einer orientierbaren Mannigfaltigkeit M^{n-1}.

2. Wir gehen jetzt zu unserer Hauptkonstruktion über[4]) und betrachten eine die Indikatrix von M^n umkehrende geschlossene Kette

$$a^n_1, a^n_2, \ldots, a^n_k, a^n_1. \tag{1}$$

Wir wollen beweisen, daß man diese geschlossene Kette stets so wählen kann, daß a^n_1 und a^n_k längs ihrer gemeinsamen $n-1$-dimensionalen Seite a^{n-1}_* an M^{n-1} anschließen und die übrigen Elemente von (1) zu M^{n-1} fremd sind. In der Tat: wir fangen mit einer willkürlichen, die Indikatrix umkehrenden Kette

$$a^n_l, \ldots, a^n_p, a^n_q, \ldots, a^n_t, a^n_l \tag{2}$$

an. Wenn sie nirgends M^{n-1} trifft, so nehmen wir eine willkürliche Zelle

[3]) „Ein topologischer Zerlegungssatz", Koninklijke Akademie te Amsterdam. Vol. XXVII, S. 613.

[4]) Es sei ein für allemal erwähnt, daß wir im folgenden alle für unsere Zwecke notwendigen Unterteilungen des gegebenen Schemas stillschweigend voraussetzen werden.

a_*^{n-1} von M^n und die zwei Zellen a_h^n und a_i^n, von M^n, welche an a_*^{n-1} schließen. Es seien jetzt

$$a_h^n, \ldots, a_p^n$$

und

$$a_i^n, \ldots, a_q^n$$

zwei a_h^n mit a_p^n bzw. a_i^n mit a_q^n verbindende[5]), die Mannigfaltigkeit M^{n-1} nicht treffende einfache Zellenketten (dabei sind a_p^n und a_q^n beliebig, aber fest gewählte, untereinander benachbarte Zellen aus (2)). Eine der beiden geschlossenen Ketten

$$a_h^n, \ldots, a_p^n, a_q^n, \ldots, a_i^n, a_h^n$$

und

$$a_h^n, \ldots, a_p^n, \ldots, a_l^n, a_t^n, \ldots, a_q^n, \ldots, a_i^n, a_h^n$$

kehrt die Indikatrix um (weil sonst auch die Kette (2) die Indikatrix nicht umkehren würde). Jede von ihnen schneidet M^{n-1} einmal in der Zelle a_*^{n-1}.

Im Falle, wo die Kette (2) m-mal ($m > 1$) M^{n-1} trifft, erlaubt folgende Konstruktion die Zahl m wenigstens um 1 zu vermindern. Es sei a_*^{n-1} eine Zelle von M^{n-1}, die gleichzeitig die gemeinsame Seite a^{n-1} zweier Zellen a_p^n und a_q^n aus (2) ist; dann verbinden[5]) wir a_p^n mit a_q^n mit einer einfachen Kette

$$a_p^n, \ldots, a_q^n,$$

die M^{n-1} nicht trifft. Alsdann kehrt eine der geschlossenen Ketten

$$a_p^n, \ldots, a_q^n, a_p^n$$

und

$$a_l^n, \ldots, a_p^n, \ldots, a_q^n, \ldots, a_t^n, a_l^n$$

die Indikatrix um; die erste von ihnen trifft M^{n-1} einmal, die andere $m-1$-mal. Dieses Verfahren führt nach höchstens $m-1$ Schritten zu einer geschlossenen Kette, die M^{n-1} genau einmal trifft und die Indikatrix umkehrt.

Eine eventuelle Unterteilung des Schemas Z^n erlaubt uns endlich vorauszusetzen, daß zwei nicht aufeinander folgende Glieder der Kette (1) zueinander fremd sind; dabei wird die Begrenzung (modulo 2)[6]) des aus sämtlichen Elementen von (1) gebildeten Komplexes zu einer $n-1$-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

---

[5]) Für $n \geqq 3$ ist dieses immer möglich zu machen, ohne die früher konstruierten Ketten zu treffen.

[6]) O. Veblen, Analysis Situs, S. 76.

3. Wir setzen nun die Elemente der Kette

$$a_1^n, a_2^n, \ldots, a_k^n, -a_1^n$$

als kohärent orientiert voraus; dann tritt die Zelle a_*^{n-1} in der Begrenzung von $\sum_{i=1}^{k} a_i^n$ zweimal und zwar mit demselben Zeichen auf.

Jetzt deformieren wir die Kette

$$a_1^n, a_2^n, \ldots, a_{k-1}^n, a_k^n,$$

indem wir ihr letztes Glied durch ein (aus mehreren Zellen zusammengesetztes) Element ersetzen, welches an M^{n-1} längs einer zu a_*^{n-1} fremden Seite a_{**}^{n-1} schließt, und dabei so, daß diese beiden Zellen in M^{n-1} ein gemeinsames Zeichen haben. So entsteht als Begrenzung des (soeben abgeänderten) Komplexes $\sum a_i^n$ eine Mannigfaltigkeit N^{n-1}:

$$\sum a_i^n \to \mathsf{N}^{n-1}.$$

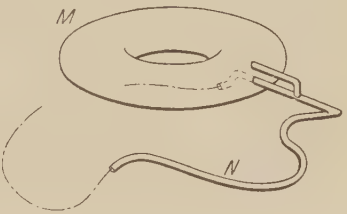

Fig. 1.

Wir setzen nun

$$M^{n-1} = \mathsf{M}^{n-1} \pm \mathsf{N}^{n-1},$$

wobei die Wahl des Zeichens in der letzten Formel durch die Forderung, M^{n-1} sei eine geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit, bestimmt ist. Aus der Konstruktion von M^{n-1} folgt unmittelbar, daß M^{n-1} in M^n einseitig eingebettet ist.

Das Theorem ist bewiesen.

Moskau, 17. Februar 1927.

(Eingegangen am 3. August 1927.)

Zur Klassenkörpertheorie auf Takagischer Grundlage.

Von

Helmut Hasse in Halle (Saale) und Arnold Scholz in Berlin.

Um Zweck und Bedeutung der in dieser Note mitgeteilten Überlegungen und Ergebnisse darzulegen, sei zunächst an den Aufbau der Klassenkörpertheorie auf Takagischer Grundlage erinnert[1]).

Ausgangspunkt ist die folgende

Definition: *Ist K ein über dem Grundkörper k relativ-Galoisscher Körper und* $\mathfrak{m}$ *ein Idealmodul aus k, so heißt diejenige Idealgruppe $H \bmod \mathfrak{m}$ in k, die durch die Relativnormen der zu* $\mathfrak{m}$ *primen Ideale aus K erzeugt wird, die $K \bmod \mathfrak{m}$ zugeordnete Idealgruppe in k.*

Dann und nur dann, wenn der Index h von H gleich dem Relativgrade n von K ist, heißt K Klassenkörper zu H.

Die bekannten analytischen Hilfsmittel (ζ-Funktion von K und L-Reihen nach H für $s \to 1$) liefern in dieser Hinsicht, daß jedenfalls stets

$$h \leqq n \tag{1}$$

gilt.

Man beweist dann zunächst, allein mit diesen analytischen Hilfsmitteln, die folgenden beiden Sätze, deren erster als Folge des mehr besagenden zweiten herauskommt:

(I) (Eindeutigkeitssatz). *In der Relation „K ist Klassenkörper zu H“ ist sowohl H durch K als auch K durch H eindeutig bestimmt.*

[1]) T. Takagi, Über eine Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörpers, Journ. of the Coll. of Science, Tokyo, **41** (9) (1920). — Siehe auch: H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil I: Klassenkörpertheorie, Jahresber. d. D. M. V. **35** (1926); Teil Ia: Beweise zu Teil I, ebenda **36** (1927); im folgenden zitiert mit H. I, H. Ia.

(I′) (Anordnungssatz). *Ist K Klassenkörper zu H und K' Klassenkörper zu H', so bedingen sich die Relationen*

$$K \geqq K' \quad \text{und} \quad H \leqq H'$$

gegenseitig.

Dabei sind Gleichheit und Anordnung für Idealgruppen [2]), unabhängig von den Erklärungsmoduln, in bekannter Weise erklärt [3]).

Ferner beweist man, jetzt unter weitgehender Heranziehung der Arithmetik in Zahlkörpern, die folgenden Hauptsätze:

(II) (Existenzsatz). *Zu jeder Idealgruppe H existiert ein Klassenkörper K.*

(II′) (Relativdiskriminantensatz). *In der Relativdiskriminante $\mathfrak{d}$ von K gehen höchstens Primteiler des Führers $\mathfrak{f}$ von H auf.*

(II″) (Isomorphiesatz). *K ist relativ-Abelsch und seine Galoissche Relativgruppe ist einstufig-isomorph zur Klassengruppe nach H.*

(III) (Umkehrsatz). *Jeder relativ-Abelsche Körper K ist Klassenkörper zu einer Idealgruppe H.*

(III′) (Führersatz). *Im Führer $\mathfrak{f}$ von H gehen höchstens Primteiler der Relativdiskriminante $\mathfrak{d}$ von K auf.*

(IV) (Spezieller Zerlegungssatz). *Ist $\mathfrak{p}^f$ die früheste Potenz eines zu $\mathfrak{f}$ primen Primideals $\mathfrak{p}$ aus k, die in H enthalten ist, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in K in verschiedene Primideale f-ten Relativgrades.*

(IV′) (Allgemeiner Zerlegungssatz). *Ist $H_\mathfrak{p}$ die engste H enthaltende Idealgruppe, deren Führer zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ aus k prim ist, e ihr Index, und $\mathfrak{p}^f$ die früheste Potenz von $\mathfrak{p}$, die in $H_\mathfrak{p}$ enthalten ist, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in K in e-te Potenzen verschiedener Primideale f-ten Relativgrades.*

Zusammengenommen ergibt sich also eine eineindeutige Zuordnung zwischen den sämtlichen relativ-Abelschen Körpern K über k und den sämtlichen Idealgruppen H in k, bei der die aufgeführten Beziehungen obwalten.

Die folgenden Ausführungen stehen nun unter dem Gesichtspunkt, die Klassenkörpertheorie soweit wie möglich, allein von den genannten *analytischen Hilfsmitteln* Gebrauch machend, zu durchdringen, also den im Vergleich hierzu erheblich komplizierteren, für die Theorie erforderlichen *arithmetischen Aufwand* hintanzustellen.

---

[2]) Wir meinen damit stets *durch Kongruenz- und Vorzeichenbedingungen definierte* Idealgruppen im Sinne von H. I, § 3.

[3]) Siehe H. I, § 3.

Ausgangspunkt dafür ist uns die Feststellung, daß in der Takagischen Definition die Voraussetzung, K sei relativ-Galoissch, entbehrlich ist. Die analytischen Hilfsmittel ergeben nämlich, als Seitenstück zu der für einen relativ-Galoisschen Körper K gültigen Tatsache (1), wie wir zeigen werden:

Satz 1. *Ist K nicht relativ-Galoissch über k, n der Relativgrad von K, und h der Index der K* mod $\mathfrak{m}$ *zugeordneten Idealgruppe H in k, so gilt*

$$h < n. \tag{2}$$

Daraus werden wir auf einfachste Weise folgern:

Satz 2. *Ist K Klassenkörper über k, so ist auch jeder Körper K' zwischen K und k Klassenkörper über k, und K Klassenkörper über K'.*

Aus diesen Bemerkungen können wir nun zwar für die arithmetisch tief fundierten Beweise der Hauptsätze (II) bis (IV′) keinen direkten Nutzen ziehen. Wir können aber, wenn wir die Takagische Definition, den Eindeutigkeitssatz (I), den Anordnungssatz (I′) und die angekündigten Sätze 1, 2 kurz als den „analytischen Komplex“ bezeichnen, folgendes zeigen:

a) Setzt man den Existenzsatz (II) voraus, so ist der Isomorphiesatz (II″) eine unmittelbare Folge aus dem analytischen Komplex und — wie es für den Beweis dieses Satzes methodisch naturgemäß ist — der abstrakten Gruppentheorie.

b) Setzt man außer (II) auch noch den Relativdiskriminantensatz (II′) voraus, so ist der spezielle Zerlegungssatz (IV) eine unmittelbare Folge aus dem analytischen Komplex und — wie es für den Beweis dieses Satzes methodisch naturgemäß ist — der Hilbertschen Zerlegungstheorie für relativ-Abelsche Körper.

b′) Setzt man außer (II), (II′) auch noch den Führersatz (III′) voraus, so gilt das gleiche auch für den allgemeinen Zerlegungssatz (IV′).

Diese Gedankengänge haben für den systematischen Aufbau der Klassenkörpertheorie, jedenfalls bei deren gegenwärtigem Stande, keinerlei Vereinfachung zur Folge. Denn beim Beweis des Existenzsatzes (II) laufen die Beweise für den Relativdiskriminantensatz (II′) und den Isomorphiesatz (II″) automatisch mit, so daß durch a) nichts gewonnen ist. Und ebenso ist der Beweis des Führersatzes (III′) aufs engste mit dem Beweis des Umkehrsatzes (III) verknüpft, so daß durch die Unabhängigkeit vom Umkehrsatz (III) in b′) nichts gewonnen ist. Und schließlich ist ein wesentlicher Teil des Umkehrsatzes (III) (nämlich der Spezialfall eines Primzahlrelativgrades l) unentbehrliche Grundlage für den Beweis des Existenzsatzes (II), so daß durch die Unabhängigkeit vom Umkehrsatz (III) in b) nicht viel gewonnen ist.

Wohl aber liefern unsere Ausführungen eine Art „Propädeutik“ der Klassenkörpertheorie. Sie können dem Neueindringenden zur Gewinnung des Verständnisses für die *Zusammenhänge* in dieser Theorie dienen, ohne daß er vorher erst die komplizierten *Beweise* für die Hauptsätze systematisch studiert hat. Hierzu ist vor allem unser Nachweis a) geeignet, der nur den Existenzsatz (II) als „unbewiesene“ Annahme voraussetzt. In seinem Verlauf lernt man die als Gesamtergebnis der Klassenkörpertheorie resultierende eineindeutige Zuordnung zwischen den relativ-Abelschen Körpern über k und den Idealgruppen in k schon „im Kleinen“, d. h. für die Unterkörper eines festen Klassenkörpers, kennen.

Beweis von Satz 1.

Es sei, wie in Satz 1 vorausgesetzt, K ein nicht relativ-Galoisscher Körper vom Relativgrade n über k, und es durchlaufe $\mathfrak{P}$ alle (nicht in der Relativdiskriminante von K aufgehenden) Primideale aus K. Durch Logarithmierung der Relation $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) \neq 0$ ergibt sich dann in bekannter Weise

$$\sum_{\mathfrak{P}} \frac{1}{N_K(\mathfrak{P})^s} = \log\frac{1}{s-1} + g_1(s).$$

Dabei bedeutet $g_1(s)$, wie auch im folgenden $g_2(s), \ldots, g_5(s)$ eine Funktion mit endlichem Grenzwert für $s \to 1$. Durchläuft nun $\mathfrak{p}_1$ alle (nicht in der Relativdiskriminante von K aufgehenden) Primideale aus k, die in K mindestens einen Primfaktor 1-ten Relativgrades enthalten, und bezeichnet $\nu_{\mathfrak{p}_1}$ die Anzahl der in $\mathfrak{p}_1$ aufgehenden Primfaktoren 1-ten Relativgrades aus K, so ist

$$\sum_{\mathfrak{P}} \frac{1}{N_K(\mathfrak{P})^s} = \sum_{\mathfrak{p}_1} \frac{\nu_{\mathfrak{p}_1}}{N_k(\mathfrak{p}_1)^s} + g_2(s).$$

Wenn also $\mathfrak{p}_1^*$ diejenigen $\mathfrak{p}_1$ durchläuft, für die $\nu_{\mathfrak{p}_1^*} = n$ ist, $\mathfrak{p}_1'$ die übrigen, für die $1 \leqq \nu_{\mathfrak{p}_1'} \leqq n-1$ ist, so hat man

$$\sum_{\mathfrak{P}} \frac{1}{N_K(\mathfrak{P})^s} \leqq n \sum_{\mathfrak{p}_1} \frac{1}{N_k(\mathfrak{p}_1^*)^s} + (n-1)\sum_{\mathfrak{p}_1'} \frac{1}{N_k(\mathfrak{p}_1')^s} + g_2(s)$$

$$= \sum_{\mathfrak{p}_1^*} \frac{1}{N_k(\mathfrak{p}_1^*)^s} + (n-1)\sum_{\mathfrak{p}_1} \frac{1}{N_k(\mathfrak{p}_1)^s} + g_2(s).$$

Mit der obigen Relation zusammen ergibt das

$$\sum_{\mathfrak{p}_1} \frac{1}{N_k(\mathfrak{p}_1)^s} \geqq \frac{1}{n-1}\log\frac{1}{s-1} - \frac{1}{n-1}\sum_{\mathfrak{p}_1^*} \frac{1}{N_k(\mathfrak{p}_1^*)^s} + g_3(s).$$

Nun sind die $\mathfrak{p}_1^*$ gerade diejenigen Primideale aus k, die im durch K über k bestimmten relativ-Galoisschen Körper K^* in (verschiedene) Prim-

ideale ersten Relativgrades zerfallen. Bezeichnet also n^* den Relativgrad von K^*, so gilt[4])

$$\sum_{\mathfrak{p}_1^*} \frac{1}{N_k(\mathfrak{p}_1^*)^s} = \frac{1}{n^*} \log \frac{1}{s-1} + g_4(s),$$

und somit

$$\sum_{\mathfrak{p}_1} \frac{1}{N_k(\mathfrak{p}_1)^s} \geqq \frac{n^*-1}{n^*} \cdot \frac{1}{n-1} \log \frac{1}{s-1} + g_5(s).$$

Nach der Voraussetzung ist nun $n^* > n$. Daraus folgt

$$\frac{n^*-1}{n^*} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^*-1}} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{n^*-1}+\frac{n}{n^*-1}-1}$$

$$= \frac{1}{n-\frac{1}{n^*-1}-\frac{n^*-n-1}{n^*-1}} \geqq \frac{1}{n-\frac{1}{n^*-1}}.$$

Also erhält man

$$\sum_{\mathfrak{p}_1} \frac{1}{N_k(\mathfrak{p}_1)^s} \geqq \frac{1}{n-\frac{1}{n^*-1}} \log \frac{1}{s-1} + g_5(s).$$

Ist jetzt H die K mod $\mathfrak{m}$ zugeordnete Idealgruppe vom Index h, und durchläuft $\mathfrak{p}$ alle Primideale aus H, so gilt[5])

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N_k(\mathfrak{p})^s} = \frac{1}{h} \log \frac{1}{s-1} + f_1(s),$$

wo $f_1(s)$, wie auch im folgenden $f_2(s)$, eine für $s \to 1$ nach oben beschränkte Funktion bedeutet. Da nun nach der Definition von H die $\mathfrak{p}_1$, als Relativnormen aus K, (von endlich vielen Ausnahmen abgesehen) unter den $\mathfrak{p}$ enthalten sind, so ergibt sich aus den beiden letzten Relationen

$$\left(\frac{1}{n-\frac{1}{n^*-1}} - \frac{1}{h} \right) \log \frac{1}{s-1} \leqq f_2(s).$$

Für $s \to 1$ führt das zu

$$\frac{1}{n-\frac{1}{n^*-1}} - \frac{1}{h} \leqq 0,$$

also zu

$$h \leqq n - \frac{1}{n^*-1} < n,$$

wie in Satz 1, (2) behauptet.

---

[4]) H. I, § 5, (7).
[5]) H. I, § 5, (6).

Beweis von Satz 2.

Es sei, wie in Satz 2 vorausgesetzt, K Klassenkörper über k zu einer Idealgruppe H, und K' ein Körper zwischen k und K. Es ist dann nach der Takagischen Definition für geeignetes $\mathfrak{m}$:

H die Idealgruppe mod $\mathfrak{m}$ in k, in die die Relativnormen der zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale aus K fallen.

Ferner bezeichne:

H' die Idealgruppe mod $\mathfrak{m}$ in k, in die die Relativnormen der zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale aus K' fallen,

$\bar{H}$ die Idealgruppe mod $\mathfrak{m}$ in K', in die die Relativnormen der zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale aus K fallen,

$\bar{H}'$ die Idealgruppe mod $\mathfrak{m}$ in K', deren Relativnormen in H fallen,

$h, h', \bar{h}, \bar{h}'$ die Indizes von $H, H', \bar{H}, \bar{H}'$,

n den Grad von K über k, n' den Grad von K' über k, $\bar{n}$ den Grad von K über K', also

$$n' \bar{n} = n.$$

Nach diesen Erklärungen ist einerseits

$$\bar{H} \leqq \bar{H}', \quad \text{also} \quad \bar{h} \geqq \bar{h}',$$

andererseits wird durch Relativnormbildung von K' nach k die Gruppe $\bar{A}$ aller zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale aus K' (aufgefaßt als Gruppe von Strahlklassen mod $\mathfrak{m}$ in K') eindeutig und isomorph abgebildet auf die Gruppe H' (aufgefaßt als Gruppe von Strahlklassen mod $\mathfrak{m}$ in k). Dabei entspricht der Untergruppe $\bar{H}'$ und nur ihr die Untergruppe H. Nach dem Isomorphieprinzip [6]) ist somit

$$\bar{A}/\bar{H}' \simeq H'/H, \quad \text{also} \quad \bar{h}' = \frac{h}{h'}.$$

Zusammengenommen ergibt sich hiernach

$$h' \bar{h} \geqq h.$$

Nun ist nach der Takagischen Definition

$$h = n,$$

so daß wir

$$h' \bar{h} \geqq n' \bar{n}$$

bewiesen haben, und ferner ist nach den Relationen (1), (2)

$$h' \leqq n', \quad \bar{h} \leqq \bar{n}.$$

[6]) H. Ia, § 1, Hilfssatz 2.

Daraus folgt aber

$$h' = n', \quad \bar{h} = \bar{n}.$$

Da nun Satz 1 ergibt, daß in der Takagischen Definition des Klassenkörpers die Voraussetzung, der fragliche Körper sei relativ-Galoissch, entbehrlich ist, ist daher K' Klassenkörper zu H' über k und K Klassenkörper zu $\bar{H}$ über K', wie in Satz 2 behauptet.

Nachweis a).

Es sei K Klassenkörper über k zur Idealgruppe H, und es bezeichne A die Gruppe aller Ideale aus k. Wird der Existenzsatz (II) vorausgesetzt, so ergibt sich in Verbindung mit den Sätzen 1, 2, dem Eindeutigkeitssatz (I) und dem Anordnungssatz (I′) ohne weiteres folgendes:

Die sämtlichen Körper zwischen k und K sind (auf Grund der Klassenkörperbeziehung) den sämtlichen Gruppen zwischen A und H eineindeutig zugeordnet; dabei entsprechen sich die Anordnungsrelationen invers; der Relativgrad über k entspricht dem Index in A.

Die Körper zwischen k und K sind sämtlich relativ-Galoissch über k.

Ist nun $\mathfrak{G}$ die Galoissche Relativgruppe von K, und bezeichnet $\mathfrak{E}$ die identische Untergruppe, so gilt nach dem Fundamentalsatz der Galoisschen Theorie:

Die sämtlichen Körper zwischen k und K sind (auf Grund der bekannten Invarianzbeziehung) den sämtlichen Gruppen zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}$ eineindeutig zugeordnet; dabei entsprechen sich die Anordnungsrelationen invers; der Relativgrad über k entspricht dem Index in $\mathfrak{G}$.

Einem relativ-Galoisschen Körper über k entspricht ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Die Verbindung dieser beiden Tatsachenkomplexe liefert:

Die sämtlichen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind den sämtlichen Untergruppen der Abelschen Gruppe A/H eineindeutig zugeordnet; dabei entsprechen sich die Anordnungsrelationen direkt; die Indizes und Ordnungen entsprechen einander.

Die Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind sämtlich Normalteiler.

Aus diesem rein gruppentheoretischen Tatbestand folgern wir nun, allein nach Sätzen der abstrakten Gruppentheorie, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ Abelsch und einstufig-isomorph zur Gruppe A/H ist, wie es der Isomorphiesatz (II″) behauptet.

Wir nutzen zunächst die *zweite* Tatsache aus, daß die Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sämtlich Normalteiler sind. Daraus folgt:

1. Ist p eine in der Ordnung von $\mathfrak{G}$ aufgehende Primzahl, so bilden die Elemente P aus $\mathfrak{G}$, deren Ordnungen Potenzen von p sind, eine Untergruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung eine Potenz von p ist.

Sind nämlich P, P' zwei solche Elemente, der Ordnungen $p^m, p^{m'}$, so ist, weil $\{P\}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist,

$$P'PP'^{-1} = P^a,$$

also

$$(PP')^{p^{m'}} = P^{1+a+\cdots+a^{p^{m'}-1}} P'^{p^{m'}} = P^{1+a+\cdots+a^{p^{m'}-1}},$$

und daher

$$(PP')^{p^{m+m'}} = E,$$

also auch die Ordnung von PP' eine Potenz von p. Hiernach ist $\mathfrak{P}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Daß dann die Ordnung von $\mathfrak{P}$ eine Potenz von p ist, ist bekannt [7]).

2. Teilerfremde Untergruppen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ sind elementweise vertauschbar (insbesondere also zu verschiedenen Primzahlen p, q im Sinne von 1. gehörige Untergruppen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$).

Sind nämlich A, B Elemente aus $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, der Ordnungen m, n, so ist wie vorher

$$BAB^{-1} = A^a, \qquad ABA^{-1} = B^b,$$

also

$$B^bAB^{-b} = A^{a^b}, \qquad A^aBA^{-a} = B^{b^a},$$

und daher

$$BA = A^aB = B^{b^a}A^a, \qquad AB = B^bA = A^{a^b}B^b,$$

also

$$A^{a-1} \text{ in } \mathfrak{B}, \qquad B^{b-1} \text{ in } \mathfrak{A}.$$

Nach der Voraussetzung folgt daraus weiter

$$a \equiv 1 \bmod m, \qquad b \equiv 1 \bmod n,$$

also

$$BAB^{-1} = A, \qquad ABA^{-1} = B,$$

was die elementweise Vertauschbarkeit von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ besagt.

Genau wie im Abelschen Falle [8]) folgt aus 1. und 2.:

3. $\mathfrak{G}$ ist das direkte Produkt der den verschiedenen Primteilern p seiner Ordnung im Sinne von 1. entsprechenden Untergruppen $\mathfrak{P}$.

---

[7]) A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung (Berlin 1923), Satz 27.

[8]) A. Speiser, loc. cit. Satz 28.

Aus 3. ergibt sich ohne weiteres auch:

4. $\mathfrak{G}$ läßt sich in direkt unzerlegbare Untergruppen von Primzahlpotenzordnung direkt zerlegen[9]).

Wir ziehen nunmehr auch die *erste* Tatsache heran, daß zwischen den Untergruppen von $\mathfrak{G}$ und A/H eine eineindeutige Zuordnung besteht, bei der sich Anordnungsrelationen, Indizes und Ordnungen entsprechen. Es entsprechen sich dann auch, weil allein auf Grund der Anordnungsrelation erklärt, Kompositum und Durchschnitt von Untergruppen, und folglich auch Darstellungen als Kompositum von Untergruppen, bei denen jede Untergruppe zum Kompositum der übrigen teilerfremd ist. Einer Zerlegung von $\mathfrak{G}$ im Sinne von 4. entspricht daher, weil A/H Abelsch ist, jedenfalls eine direkte Zerlegung von A/H in Faktoren von Primzahlpotenzordnung. Wäre nun ein Faktor dieser Zerlegung von A/H in zwei direkte Faktoren zerlegbar, so wäre der entsprechende Faktor von $\mathfrak{G}$ jedenfalls als Kompositum zweier teilerfremder Untergruppen darstellbar. Nach dem in 2. Bewiesenen wäre aber eine solche Darstellung eine direkte Zerlegung, während wir doch von direkt unzerlegbaren Faktoren von $\mathfrak{G}$ ausgingen. Somit entspricht einer Zerlegung im Sinne von 4. eine ebensolche Zerlegung von A/H. Da aber A/H Abelsch ist, sind dann die Faktoren von A/H zyklisch. Weil nun auch diese Eigenschaft bei Primzahlpotenzordnung allein durch Anordnungsrelation und Index charakterisierbar ist, nämlich durch die Eigenschaft, nur *eine* Untergruppe von Primzahlindex zu enthalten[10]), so überträgt sie sich auf die Faktoren von $\mathfrak{G}$. Daraus folgt dann ohne weiteres, daß $\mathfrak{G}$ Abelsch und einstufig-isomorph zu A/H ist, wie behauptet.

Nachweis b).

Es mag hier genügen, auf den in H. I, § 6, D. geführten Beweis des speziellen Zerlegungssatzes (IV) hinzuweisen. Der Führersatz (III′) wird dort nicht angewandt (im Gegensatz zum Relativdiskriminantensatz (II′), der zu dem Schluß gebraucht wird, daß die Primfaktoren in K eines zum Führer $\mathfrak{f}$ primen Primideals $\mathfrak{p}$ aus k verschieden sind). Der Umkehrsatz (III) wird dort in zweierlei Weise angewandt:

Einerseits unmittelbar, zu dem Schluß, daß jeder Unterkörper, insbesondere der Zerlegungskörper eines Klassenkörpers, selbst Klassenkörper ist (S. 29, Z. 23 u. S. 30, Z. 4/5 u. 24). Das folgt aber auch aus unserem speziellen Satz 2, an Stelle des allgemeinen Umkehrsatzes (III).

---

[9]) Den Hinweis auf die Gültigkeit des Satzes 4 für Gruppen $\mathfrak{G}$, deren sämtliche Untergruppen Normalteiler sind, verdanken wir einer freundlichen Mitteilung Herrn Speisers.

[10]) A. Speiser, loc. cit. Satz 56.

Andererseits mittelbar, insofern er in den dort vorangehenden Satz 11 eingeht (S. 30, Z. 5/6 u. 21). Nun folgt aber die für den Beweis dieses Satzes im Falle b) erforderliche Feststellung, daß der Durchschnitt K_* Klassenkörper ist, auch aus Satz 2; und die im Falle a) erforderliche Feststellung, daß das Kompositum K^* Klassenkörper ist, genau wie in H. I, S. 28, Beweis 2., ohne daß man den vorangehenden komplizierten Beweis 1. (Satz (C)) benötigt. Im übrigen erfordert der Beweis von H. I, Satz 11 nur den Eindeutigkeitssatz (I), den Anordnungssatz (I′) und den Existenzsatz (II).

Nachweis b′).

Hier sei ebenfalls nur auf den in H. I, § 7 geführten Beweis des allgemeinen Zerlegungssatzes (IV′) und auf die Tatsache hingewiesen, daß man dort (S. 31, Z. 13—15) wieder mit unserem speziellen Satz 2 an Stelle des allgemeinen Umkehrsatzes (III) auskommt. An dieser Stelle braucht man wirklich den Führersatz (III′), zu dem Schluß, daß $K_\mathfrak{p}$ alle Körper zwischen k und K mit zu $\mathfrak{p}$ primer Relativdiskriminante umfaßt, daß also jedem solchen Körper eine Idealgruppe mit zu $\mathfrak{p}$ primem Führer und somit eine $H_\mathfrak{p}$ umfassende Idealgruppe entspricht.

(Eingegangen am 17. September 1927.)

Approximation theorems for generalized almost periodic functions [1].

By

Philip Franklin, Cambridge, Mass. (U.S.A.).

§ 1.

Introduction.

The theory of continuous almost periodic functions was founded by Harald Bohr [2]. He defines a *displacement number* of a function $f(x)$ corresponding to ε as a number $\tau(\varepsilon)$ such that, for all values of x,

$$|f(x+\tau)-f(x)| \leqq \varepsilon. \tag{1}$$

A (complex) function of the real variable x is then said to be *almost periodic* if

a) it is continuous for all values of x, $-\infty < x < \infty$, and

b) for every positive ε, there exists a length $L(\varepsilon)$, such that every interval of length L contains at least one displacement number for the function corresponding to ε.

Bohr shows that for these ap C functions [3] the mean value

$$M\{f(t)\,e^{-i\lambda t}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt = \alpha(\lambda, f) \tag{2}$$

exists for all real λ, but is only distinct from zero for an enumerable number of values of λ, λ_j, so that there is an analogue of the Fourier development for periodic functions

$$f(x) \sim \sum \alpha(\lambda, f)\,e^{i\lambda x}. \tag{3}$$

---

[1]) Presented to the American Mathematical Society, January, 1928.

[2]) H. Bohr, Acta Mathematica (1924–1925) **45**, pp. 29–121; **46**, pp. 101–214.

[3]) We write ap C for almost periodic continuous.

An analogue of Parseval's theorem holds, and also an approximation theorem, which states the possibility of approximating any ap C function uniformly by a finite linear combination of the exponentials appearing in its Fourier expansion (3). This leads to the alternative definition of the ap C functions as *those functions which may be approximated uniformly for* $-\infty < x < \infty$ *to any degree of exactness by a linear combination of exponentials* [4]).

Several generalizations of the original definition have been given [5]). The modifications consist in weakening the continuity requirement, a) and making a corresponding weakening in the equation which defines a displacement number (1). As the goal in all these generalizations has been the proof of an analogue of the Parseval relation; the possibility of finding approximation theorems and proving that such approximation properties suffice to define the functions under consideration has been overlooked except for the functions of Weyl [5a]). For these, the approximation theorem coincides with the Parseval relation.

It is the object of the present paper to show that for all the classes of generalized ap functions which have been defined, there exist approximation theorems, the sense in which the linear combination of exponentials approximates the function being the same as the sense in which $f(x+\tau)$ approximates $f(x)$ in the definition of a displacement number. Furthermore, these approximation properties will be found to be sufficient as well as necessary conditions for the different types of ap functions, so that they give rise to alternative definitions. The point of view of approximation properties leads us to the definition and discussion of some new generalizations.

§ 2.

The almost periodic functions with summable square.

We begin with the generalization which applies to functions with summable square, S sq. These ap S sq functions [6]) are defined as (com-

---

[4]) For a short proof of the properties just quoted, as well as some others used later, cf. H. Weyl, Math. Annalen **97** (1927), pp. 338—356.

[5]) N. Wiener, Math. Zeitschr. **24** (1925), pp. 575—616. — W. Stepanoff, Math. Annalen **95** (1926), pp. 472—498. — A. S. Besicovitch, Paris C. R. **181** (1925), part 2, pp. 394—397. — H. Weyl, loc. cit. pp. 353—354.

[5a]) I have recently been informed by Professor Harald Bohr that he has developed many of the approximation theorems of this paper. His approach is somewhat different from mine. cf. A. Besicovitch and H. Bohr, Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Math.-fys. Meddelelser. VIII, 5. pp. 1—31 (added in proof).

[6]) They are the pseudoperiodic functions of Wiener, loc. cit., and the functions ap III of Stepanoff, loc. cit.

plex) functions of a real variable x, $f(x)$ such that, in every finite interval $f(x)$ is measurable and $|f(x)|^2$ is summable, satisfying condition b) provided $\tau(\varepsilon)$ is defined as a displacement number for ε when, for a fixed d and all values of a,

$$\frac{1}{d}\int_a^{a+d} |f(x+\tau)-f(x)|^2\,dx \leqq \varepsilon^2. \tag{4}$$

Stepanoff shows that if this definition holds for a particular d, it holds for all values of d. As the L of b) varies with d, when we think of d as variable we write $L(\varepsilon, d)$. We wish to prove

Theorem I. *A necessary and sufficient condition for a (measurable) function $f(x)$ to be almost periodic with summable square is the existence of a sequence of linear combinations of exponentials,*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N(n)} c_{nk}\, e^{-i\lambda_{nk}x}, \tag{5}$$

approximating it in the sense that:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{a+d} |f(x)-P_n(x)|^2\,dx = 0, \tag{6}$$

uniformly in a, for one and hence for all d.

For the sufficiency of the condition [7]) we note that for any positive ε, we will have for some $n(\varepsilon)$ in view of (6)

$$\frac{1}{d}\int_a^{a+d} |f(x)-P_n(x)|^2\,dx < \frac{\varepsilon^2}{9}. \tag{7}$$

But, as $P_n(x)$ is ap C, we may write for any $\tau\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$:

$$\frac{1}{d}\int_a^{a+d} |P_n(x+\tau)-P_n(x)|^2\,dx \leqq \frac{\varepsilon^2}{9}. \tag{8}$$

On combining (7) as applied to x and $x+\tau$ with (8) by means of

$$\left(\sum_1^3 A_s\right)^2 \leqq \sum_1^3 A_s^2 \cdot \sum_1^3 1^2 = 3\sum_1^3 A_s^2, \tag{9}$$

we see that $f(x)$ satisfies (4) and we may use $L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ for P_n, as the $L(\varepsilon)$ for $f(x)$. As $|f(x)|^2$ is summable because of (6), $f(x)$ is an ap S sq function.

---

[7]) cf. Stepanoff, loc. cit. p. 493, or Wiener, loc. cit. p. 607 for related theorems.

To prove the necessity of the condition, we form the function

$$F(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_0^h f(t+x)\,dt, \tag{10}$$

where h is a constant to be specified later. This is an ap C function, and hence may be uniformly approximated by a linear combination of exponentials, $P_n(x)$ for which we will have, for all y,

$$\frac{1}{d}\int_y^{y+d} |F(x) - P_n(x)|^2\,dx < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{11}$$

But

$$F(x) - f(x) = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+t)\,dt - \frac{1}{h}\int_0^h f(x)\,dt, \tag{12}$$

from which we find

$$\begin{aligned} |F(x) - f(x)|^2 &= \left|\frac{1}{h}\int_0^h [f(x+t) - f(x)]\,dt\right|^2 \\ &\leqq \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|^2\,dt, \end{aligned} \tag{13}$$

by the Schwartz inequality. Hence we have [8])

$$\begin{aligned} \frac{1}{d}\int_y^{y+d} |F(x) - f(x)|^2\,dx &\leqq \frac{1}{d}\int_y^{y+d} dx\,\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|^2\,dt \\ &\leqq \frac{1}{h}\int_0^h dt\,\frac{1}{d}\int_y^{y+d} |f(x+t) - f(x)|^2\,dx. \end{aligned} \tag{14}$$

Now recall that $f(x)$ is an ap S sq function, so that there exists an $L(\varepsilon, d)$ with the property b). In particular, there is a $\tau\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)$ in the interval $y - L < \tau < y$, so that if

$$x' = x + y - \tau, \qquad 0 < x' < L + d \quad \text{as} \quad 0 < x < d. \tag{15}$$

Using (4) and (15), we find

$$\frac{1}{d}\int_0^d |f(x+y) - f(x')|^2\,dx < \frac{\varepsilon^2}{36}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{d}\int_0^d |f(x+y+t) - f(x'+t)|^2\,dx < \frac{\varepsilon^2}{36}. \tag{17}$$

[8]) For the inversion of the order of integration, cf. e. g. L. Schlesinger und A. Plessner, Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen (1926), p. 179.

But, by a property[9]) of the Lebesgue integral of a function with summable square over a *finite* interval, here $0<x'<L+d+h$, we must have

$$(18) \qquad \frac{1}{d}\int_0^d |f(x'+t)-f(x')|^2\,dx \leqq \frac{1}{d}\int_0^{L+d} |f(x'+t)-f(x')|^2\,dx' < \frac{\varepsilon^2}{36},$$

provided $t<\eta(\varepsilon)$.

On combining (16), (17) and (18) by means of (9), we obtain

$$(19) \qquad \frac{1}{d}\int_y^{y+d} |f(x+t)-f(x)|^2\,dx = \frac{1}{d}\int_0^d |f(x+y+t)-f(x+y)|^2\,dx$$
$$< \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad \text{for} \quad t<\eta(\varepsilon).$$

Consequently, if we take $h<\eta(\varepsilon)$, we will have from (14)

$$(20) \qquad \frac{1}{d}\int_y^{y+d} |F(x)-f(x)|^2\,dx \leqq \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Finally we combine (11) and (20) to obtain

$$(21) \qquad \frac{1}{d}\int_y^{y+d} |f(x)-P_n(x)|^2\,dx \leqq \varepsilon^2,$$

which is equivalent to the condition demanded by the theorem.

Corollary 1. *The frequencies appearing in the approximating linear combinations may be restricted to be frequencies of the function.*

By the frequencies of the function, $f(x)$, we mean the values of λ for which

$$(22) \qquad \alpha(\lambda, f) = M\{f(t)\,e^{-i\lambda t}\} \neq 0.$$

Stepanoff has shown (cf. (81) below) that they are related to the frequencies of $F(x)$ by

$$(23) \qquad \alpha(\lambda, F) = \alpha(\lambda, f)\frac{e^{i\lambda h}-1}{i\lambda h},$$

from which he deduces that they are enumerable in number. As (23) shows that every frequency of $F(x)$ is a frequency of $f(x)$, and as the frequencies appearing in the $P_n(x)$ of (11) may be selected from those of $F(x)$, the corollary is proved.

In particular, if we have a sequence of $P_n(x)$ of this kind for which (6) holds, we may supply any exponential appearing in a given $P_m(x)$

[9]) cf. Schlesinger und Plessner, loc. cit. p. 215.

in all the following $P_n(x)$, $n > m$ in which it does not occur with zero coefficients, and write in place of (5),

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N(n)} c_{nk} e^{-i\lambda_k x}, \tag{24}$$

where the λ_k are the frequencies of $f(x)$, enumerated once for all.

As a converse to corollary 1, we will establish

Corollary 2. *For any given approximating linear combination* (5), *such that, for all* a,

$$\frac{1}{d}\int_a^{a+d} |f(x) - P_n(x)|^2\, dx < \varepsilon^2, \tag{25}$$

the coefficients satisfy the relation

$$|c_{nk} - \alpha(\lambda_{nk}, f)| < \varepsilon, \tag{26}$$

so that any frequency which appears in $P_n(x)$ *with a coefficient in absolute value greater than* ε *is a frequency of* $f(x)$.

From the existence of the limits (2), (22) which define the $\alpha(\lambda, f)$ for ap C or ap S sq functions, we may put $T = Kd$, K integral, and write

$$\alpha(\lambda, f) - \alpha(\lambda, P_n) = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{Kd}\int_0^{Kd} [f(x) - P_n(x)]\, e^{-i\lambda x}\, dx. \tag{27}$$

But we have

$$\left|\frac{1}{Kd}\int_0^{Kd} [f(x) - P_n(x)]\, e^{-i\lambda x}\, dx\right| \leqq \frac{1}{Kd}\int_0^{Kd} |f(x) - P_n(x)|\, dx \tag{28}$$

$$\leqq \sqrt{\frac{1}{Kd}\int_0^{Kd} |f(x) - P_n(x)|^2\, dx}$$

by the Schwartz inequality.

Finally, we notice that

$$\frac{1}{Kd}\int_0^{Kd} |f(x) - P_n(x)|^2\, dx = \frac{1}{K}\left\{\frac{1}{d}\int_0^{d} + \frac{1}{d}\int_d^{2d} + \cdots + \frac{1}{d}\int_{(K-1)d}^{Kd}\right\} \leqq \varepsilon^2 \tag{29}$$

by (25), and on using (27), (28) and (29) we see that

$$\alpha(\lambda, f) - \alpha(\lambda, P_n) \leqq \varepsilon, \tag{30}$$

from which (26) follows since $\alpha(\lambda, P_n) = c_{nk}$.

We note further that the $\alpha(\lambda, f)$ may be defined in terms of any sequence of $P_n(x)$ satisfying (6) by

$$\alpha(\lambda, f) = \lim_{n \to \infty} c_n(\lambda), \tag{31}$$

where $c_n(\lambda)$ is the coefficient of $e^{i\lambda x}$ in $P_n(x)$, i. e. c_{nk} if λ is a λ_{nk} and otherwise zero.

§ 3.

The almost periodic summable functions.

We shall now treat the generalization which applies to summable functions, S. These ap S functions[10]) are defined as (complex) functions of a real variable x, $f(x)$ summable in every finite interval, satisfying condition b) provided $\tau(\varepsilon)$ is defined as a displacement number for ε when, for a fixed d and all values of a,

$$\frac{1}{d} \int_a^{a+d} |f(x+\tau) - f(x)|\, dx \leqq \varepsilon. \tag{32}$$

Here, also, if the definition holds for one d, it holds for all d. As the L of b) varies with d, when we wish to indicate this dependence we write $L(\varepsilon, d)$. Our theorem of approximation is here

Theorem II. *A necessary and sufficient condition for a (measurable) function $f(x)$ to be a summable almost periodic function is the existence of a sequence of linear combinations of exponentials, $P_n(x)$, (5), approximating it in the sense that*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{d} \int_a^{a+d} |f(x) - P_n(x)|\, dx = 0, \tag{33}$$

uniformly in a, for one and hence for all d.

We prove the sufficiency of the condition by showing that, if n is selected so that

$$\frac{1}{d} \int_a^{a+d} |f(x) - P_n(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{34}$$

any $L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ for this $P_n(x)$ is an $L(\varepsilon)$ for $f(x)$. The argument is entirely parallel to that used for theorem I. The summability of $f(x)$ follows from (33).

---

[10]) These are the functions ap II of Stepanoff, loc. cit.

The necessity may also be proved by reasoning analogous to that used for theorem I. We define the function $F(x)$ by (10), which again is ap C, and approximate it uniformly, and hence in the sense we are using here, by a $P_n(x)$. By using the property [11]) of the Lebesgue integral of a summable function over a *finite* interval which necessitates

$$\frac{1}{d}\int_0^{L+d} |f(x'+t)-f(x')|\,dx', \quad \text{if } t<\eta(\varepsilon), \tag{35}$$

which we extend to any interval of length d by using condition b) as for (19) above and inverting a double integral as in (14) we show that $F(x)$, and hence $P_n(x)$, approximates $f(x)$ in the present sense.

We also prove as before

Corollary 1. *The frequencies appearing in the approximating linear combinations may be restricted to be frequencies of the function.*

Here, again, we may replace (5) by (24).

The converse is here

Corollary 2. *For any given approximating linear combination* (5), *such that, for all* a

$$\frac{1}{d}\int_a^{a+d} |f(x)-P_n(x)|\,dx \tag{36}$$

the coefficients satisfy the relation

$$|c_{nk}-\alpha(\lambda_{nk},f)|<\varepsilon, \tag{37}$$

so that any frequency which appears in $P_n(x)$ *with a coefficient in absolute value greater than* ε *is a frequency of* $f(x)$.

Since (30) holds, the $\alpha(\lambda,f)$ may be defined for any ap S function in terms of any sequence of $P_n(x)$ satisfying (33) by means of (31).

§ 4.

The almost periodic measurable functions.

We have come now to the widest generalization, that which applies to functions merely measurable, M. These ap M functions [12]) are defined as (complex) functions of a real variable x, $f(x)$, measurable in every finite interval satisfying condition b) provided $\tau(\varepsilon)$ is defined as a displacement number for ε when, for a fixed d,

$$|f(x+\tau)-f(x)|\leqq\varepsilon, \tag{38}$$

[11]) cf. Schlesinger und Plessner, loc. cit. p. 195.

[12]) These are the functions ap I of Stepanoff, loc. cit.

for all x *except* those on a set $\{x\}$ whose exterior measure in every interval of length d is $< d\varepsilon$, or whose density on such an interval is $< \varepsilon$. The definition remains essentially unchanged if d is regarded as variable, in which case the L of b) varies with d, and we write $L(\varepsilon, d)$.

For the ap M functions, we shall prove:

Theorem III. *A necessary and sufficient condition for a (measurable) function $f(x)$ to be a measurable almost periodic function is the existence of a sequence of linear combinations of exponentials, $P_n(x)$, (5), approximating it in the sense that*

$$\lim \varepsilon_n = 0, \qquad |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n \tag{39}$$

for all x except those on a set $\{x\}$ of density less than ε_n in every interval of length d, i. e. of exterior measure less than $d\varepsilon_n$ in any such interval.

We first prove the condition sufficient. Select an n for which $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{3}$. For any $L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ for the ap C function $P_n(x)$, we will have:

$$|P_n(x+\tau) - P_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}, \text{ for all } x. \tag{40}$$

But, by (39), we have

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ except on a set } \{x_1\}, \tag{41}$$

and hence

$$|f(x+\tau) - P_n(x+\tau)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ except on a set } \{x_2\}. \tag{42}$$

The sets $\{x_1\}$ and $\{x_2\}$ are both of density less than $\frac{\varepsilon}{3}$ in every interval of length d. From the last three inequalities, it follows that

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon, \text{ except on } \{x_1\} + \{x_2\}. \tag{43}$$

As the set $\{x_1\} + \{x_2\}$ is at most of density $\frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$, in every interval of length d, τ is a displacement number of $f(x)$ for ε, and condition b) is satisfied by taking $L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ for $P_n(x)$ as $L(\varepsilon)$.

We must now prove the condition necessary. We recall a theorem of Stepanoff which states every ap M function is bounded, $|f(x)| < G(\varepsilon)$, *except* for a set $\{x\}$ of density less than ε on every interval of length d. Consequently, if we define a function $g(x)$ by

$$\begin{aligned} &g(x) = f(x), && |f(x)| \leqq G\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right), \\ &g(x) = G\,\frac{f(x)}{f(x)}, && |f(x)| \geqq G\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right), \end{aligned} \tag{44}$$

we shall have

$$g(x)-f(x)=0 \quad \text{except for a set } \{x_1\} \tag{45}$$

of density less than $\frac{\varepsilon}{2}$ on every interval of length d. We easily see from (44) that, for any τ, and all x,

$$|g(x+\tau)-g(x)| \leqq |f(x+\tau)-f(x)|. \tag{46}$$

In particular, if τ is a displacement number of $f(x)$ for $\frac{\varepsilon}{(2G+1)}$, the right, and hence the left member will be less than this except on a set of this density on any interval of length d, so that:

$$\frac{1}{d}\int_a^{a+d} |g(x+\tau)-g(x)|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{2G+1}+\frac{2G\varepsilon}{2G+1} \leqq \varepsilon, \tag{47}$$

since the integrand is at most $2G$ on the excepted set. Thus $g(x)$ is an ap S function, since a bounded measurable function is necessarily summable, and condition b) is satisfied with L an $L\left(\frac{\varepsilon}{(2G+1)}\right)$ for $f(x)$. By theorem II we may find a linear combination of exponentials, $P_n(x)$, such that for all a,

$$\frac{1}{d}\int_a^{a+d} |g(x)-P_n(x)|\,dx < \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{48}$$

It follows from this that if

$$|g(x)-P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{except on a set } \{x_2\}, \tag{49}$$

this set is of density less than $\frac{\varepsilon}{2}$ in any interval of length d. For, if the measure of $\{x_2\}$ included in the interval a to $a+d$ is kd, we have from (48) and (49)

$$\frac{1}{d}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot kd < \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad \text{or} \quad k<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{50}$$

Combining (45) and (49) we see that

$$|f(x)-P_n(x)| < \varepsilon \quad \text{except on a set } \{x\}, \tag{51}$$

included in the set $\{x_1\}+\{x_2\}$, and hence of density less than ε in every interval of length d. This completes the proof.

Before we obtain analogues of the corollaries previously proved, we must define the frequencies of an ap M function. If such a function is not uniformly summable, the limits used in the earlier cases to define the $\alpha(\lambda, f)$ will not exist in general. We may, however, define an enumerable set of frequencies for $f(x)$ as follows.

We select a sequence of increasing values, G_j such that

$$\lim_{j=\infty} G_j = \infty, \quad \text{but} \quad G_{j+1} - G_j < K, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{52}$$

K being any fixed bound. We might, e. g., take $G_j = j$. For each of these we define a function $g_j(x)$ by means of (44). These are all ap S functions, and hence have frequencies defined in the usual way, by the coefficients $\alpha(\lambda, g_j)$. The totality of these frequencies gives an enumerable set. If we throw out all those λ's for which

$$\lim_{j=\infty} \alpha(\lambda, g_j) = 0, \tag{53}$$

we obtain a set which we define as the frequencies of $f(x)$. For these the limit indicated in (53) either fails to exist, or gives a nonzero value.

To show the validity of this definition, we must prove that the same set are obtained from any other choice of G_j' satisfying (52). Let, for a particular G_s', for wich the modified function is $g_s'(x)$.

$$G_j \leqq G_s' \leqq G_{j+1}. \tag{54}$$

If k_j is the maximum density of the point set where $f(x) \geqq G_j$ on the intervals $0 < x < T$, for all T, we will have:

$$\frac{1}{T}\int_0^T g_s'(x) e^{-i\lambda x} dx - \frac{1}{T}\int_0^T g_j(x) e^{-i\lambda x} dx \leqq (G_s' - G_j) k_j \leqq K k_j, \tag{55}$$

by (44), (54) and (52). On taking the limit for $T \to \infty$, we find:

$$|\alpha(\lambda, g_s') - \alpha(\lambda, g_j)| \leqq K k_j. \tag{56}$$

Now let s increase. As $s \to \infty$, $G_j \to \infty$, and since, by the theorem of Stepanoff we quoted above, $k_j \leqq \varepsilon$, when $G_j > G(\varepsilon)$, the right member of (56) approaches zero. This shows that if λ is not a frequency of $f(x)$ as determined by (53) using the g_j, it will not be when the g_j' are used, and as the roles of these quantities may be interchanged, the totality of frequencies obtained in either case is the same.

As Stepanoff has shown that an ap M function is also ap S if it is uniformly summable, in order to be useful a definition of frequencies should reduce to the usual one in this case. Consideration of the definition of the Lebesgue integral for non-bounded functions shows that, if

$$\alpha(\lambda, f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-i\lambda t} dt \tag{57}$$

exists,

$$\lim_{j\to\infty} \alpha(\lambda, g_j) \tag{58}$$

will also exist and have the same value. The existence of (58) does not, of course, imply that of (57). In consequence of the relation just stated, whenever for a particular λ_1 the mean value used before to define $\alpha(\lambda_1, f)$ exists, the previous definition of λ being a frequency agrees with the present one, and in particular, if the ap M function is an ap S function, its characteristic frequencies are the same whether defined by (53) or the mean value definition.

Our definition immediately leads to:

Corollary 1. *For any almost periodic measurable function we may define an enumerable set of characteristic frequencies. The frequencies appearing in the approximating linear combinations may be restricted to be members of this set.*

§ 5.

Asymptotically almost periodic functions.

The definition of an ap C function is a restriction on the values of the function at all points, in the sense that, if the values of such a function be changed on any point set included in a finite interval, the resulting function can not be ap C. If sets of measure zero be disregarded, this property is shared by the three generalizations we have discussed above. The close relation of these classes of functions is further brought out by Stepanoff, who has shown that each ap C, ap S sq, ap S or ap M function belongs to all the later types in the series, and if it possesses the requisite continuity (uniform continuity, with square uniformly summable, uniformly summable respectively) belongs to the corresponding earlier type.

The generalizations of Weyl and Besicovitch are essentially different from these, in as much as they merely restrict the values of the functions in question as to their asymptotic behavior. With Weyl, these asymptotically almost periodic functions with summable square, or Aap S sq functions may be defined as (complex) functions of a real variable x, $f(x)$ measurable and with $|f(x)|^2$ summable in every finite interval satisfying condition b) provided $\tau(\varepsilon)$ is defined as a displacement number for ε when for $T > J(\varepsilon)$;

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x+\tau) - f(x)|^2\, dx < \varepsilon^2 \tag{59}$$

so that as Weyl shows

$$\mathrm{M}\{|f(x+\tau) - f(x)|^2\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x+\tau) - f(x)|^2\, dx$$

exists uniformly in a and is less than ε^2. Weyl has shown that these functions are the widest generalization for which Bohr's analogue of the Parseval relation holds, in as much as a necessary and sufficient condition for a function to satisfy the completeness relation is that it be Aap S sq. This result may be restated as an approximation theorem, in

Theorem IV. *A necessary and sufficient condition for a (measurable) function $f(x)$ to be an asymptotically almost periodic function with summable square is the existence of a sequence of linear combinations of exponentials* (5) *approximating it in the sense that*:

$$\lim \varepsilon_n = 0, \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(x) - P_n(x)|^2 \, dx < \varepsilon_a^2, \tag{60}$$

where the last limit exists uniformly in a.

The sufficiency follows as for theorem I, and the necessity is a part of Weyl's theorem.

Corollary 1 to theorem I applies here, as well as an obvious analogue of Corollary 2 and the remarks which follow.

While the Aap S sq exhaust the generalizations from the standpoint of the completeness relation, from the point of view of approximation theorems we are led to investigate asymptotically ap functions of the other types. As the Aap C functions have no properties distinct from those Aap S sq, and the Aap M functions seem to be too weakly restricted to be of much interest, we shall confine our attention to functions Aap S. We define these as (complex) functions of a real variable x, $f(x)$ summable in every finite interval, satisfying condition b) provided $\tau(\varepsilon)$ is defined as a displacement number for ε when for all a and

$$T > J(\varepsilon), \qquad \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(x+\tau) - f(x)| \, dx < \varepsilon \tag{61}$$

we evidently may select $L(\varepsilon) = J(\varepsilon)$. Our approximation theorem is here

Theorem V. *A necessary and sufficient condition for a (measurable) function $f(x)$ to be an asymptotically almost periodic summable function is the existence of a sequence of linear combinations of exponentials* (5) *approximating it in the sense that*:

$$\lim \varepsilon_n = 0, \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(x) - P_n(x)| \, dx < \varepsilon_n, \tag{62}$$

where the last limit exists uniformly in a.

The proof of the sufficiency is entirely analogous to that used for Theorem II.

For the proof of the necessity, we must form certain auxiliary functions. We begin with

$$F(x) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_{0}^{h} f(t+x)\,dt. \tag{63}$$

We shall show that this, like $f(x)$ is also Aap S. We have

$$F(x+\tau) - F(x) = \frac{1}{h}\int_{0}^{h} [f(\tau+t+x) - f(t+x)]\,dt \tag{64}$$

$$\frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} |F(x+\tau) - F(x)|\,dx \leqq \frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} dx\,\frac{1}{h}\int_{0}^{h} |f(\tau+t+x) - f(t+x)|\,dt \tag{65}$$

$$\leqq \frac{1}{h}\int_{0}^{h} dt\,\frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} f(\tau+t+x) - f(t+x)\,dx.$$

As the inner integral is less than ε for $T > J(\varepsilon)$, depending on ε but not on a, for τ a displacement number for ε for the Aap S function $f(x)$, while the second one is an average, it follows that the left member of (65) is $\leqq \varepsilon$, and $F(x)$ is Aap S with the same $\tau(\varepsilon)$ and $J(\varepsilon)$ as $f(x)$.

We must next show that, for h small, $F(x)$ approximates $f(x)$ asymptotically in the mean. By inverting a double integral, we find

$$\frac{1}{T}\int_{y}^{y+T} |F(x) - f(x)|\,dx \leqq \frac{1}{h}\int_{0}^{h} dt\,\frac{1}{T}\int_{y}^{y+T} |f(x+t) - f(x)|\,dx. \tag{66}$$

Now recall that $f(x)$ is an Aap S function, so that there exists an $L(\varepsilon)$ with the property b). In particular, there is a $\tau\left(\frac{\varepsilon}{24}\right)$ in the interval $y - L < \tau < y$, so that if

$$x' = x + y - \tau, \qquad 0 < x' < L + T_0 \text{ as } 0 < x < T_0. \tag{67}$$

By use of (61) and (67) we find for $T_0 > J\left(\frac{\varepsilon}{24}\right)$

$$\frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} |f(x+y) - f(x')|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{24}, \tag{68}$$

$$\frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} |f(x+y+t) - f(x'+t)|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{24}. \tag{69}$$

If we recall a property[11]) of the Lebesgue integral over a *finite* interval, here $0 < x' < L + T_0 + h$, we see that

$$(70)\quad \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |f(x'+t) - f(x')|\,dx \leqq \frac{1}{T_0}\int_0^{L+T_0} |f(x'+t) - f(x')|\,dx' \leqq \frac{\varepsilon}{24},$$

provided $t < \eta(\varepsilon)$. These inequalities give

$$(71)\quad \frac{1}{T_0}\int_y^{y+T_0} |f(x+t) - f(x)|\,dx = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |f(x+y+t) - f(x+y)|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Thus, if h is taken less than $\eta(\varepsilon)$ we shall have by (66),

$$(72)\quad \frac{1}{T_0}\int_y^{y+T_0} |F(x) - f(x)|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{8},$$

for a *particular* T_0. But, for any $T > T_0$, we have $T = m T_0 + \theta T_0$ and

$$(73)\quad \frac{1}{T}\int_y^{y+T} |F(x) - f(x)|\,dx = \frac{1}{T}\left\{\int_y^{y+T_0} + \int_{y+T_0}^{y+2T_0} + \cdots \int_{y+(m-1)T_0}^{y+mT_0} + \int_{y+mT_0}^{T}\right\}$$
$$\leqq \frac{(m+1)T_0\,\varepsilon}{8T}.$$

As a consequence of this,

$$(74)\quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_y^{y+T} |F(x) - f(x)|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{4},$$

where the existence of the limit uniformly with respect to a easily follow from (61) and (65).

We have now shown that in a certain sense, $F(x)$ approximates $f(x)$ when h is small, and also that it is Aap S. Since it is defined as an integral, it is continuous. Using this fact, we shall now prove that it may be approximated by a function which is Aap S sq. To do this, define for it a $g(x)$ by (44), where $f(x)$ is replaced by $F(x)$ and the quantity G used in the definition is to be more precisely specified later. The function $g(x)$ is obviously continuous and bounded, and hence, being Aap S may readily be proved to be Aap S sq, since

$$(75)\quad \frac{1}{T}\int_a^{a+T} |g(x+\tau) - g(x)|^2\,dx \leqq 2G\cdot\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |g(x+\tau) - g(x)|\,dx.$$

We must now show that $g(x)$ approximates $F(x)$. On selecting the $L\left(\frac{\varepsilon}{16}\right)$ of condition b), (61), we shall have

$$(76) \qquad \frac{1}{T}\int_0^T |F(x+\tau)-F(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{16}, \qquad T > J\left(\frac{\varepsilon}{16}\right).$$

The same relation will hold for $g(x)$, and also for $F(x)-g(x)$ with twice the right member.

In particular, take for G the maximum value of $|F(x)|$ in the interval $0 < x < L + T_0$. In this interval the function $F(x)-g(x)$ will be zero, and as (cf. (67)) we can find a displacement number taking any interval of length T_0 into an interval of the same length included in this zero-valued interval, we may write

$$(77) \qquad \frac{1}{T_0}\int_y^{y+T_0} |F(x)-g(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{8}$$

for a *particular* T_0, and hence reasoning as in (73), for any $T > T_0$,

$$(78) \qquad \frac{1}{T}\int_y^{y+T} |F(x)-g(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

which is the approximating relation we sought.

Finally, by applying Theorem V to $g(x)$, and using the Schwartz inequality, we obtain

$$(79) \qquad \frac{1}{T}\int_y^{y+T} |g(x)-P_n(x)|\,dx \leqq \sqrt{\frac{1}{T}\int_y^{y+T} |g(x)-P_n(x)|^2\,dx} \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On combining the relations (74), (78) and (79) we find

$$(80) \qquad \frac{1}{T}\int_y^{y+T} |f(x)-P_n(x)|\,dx \leqq \varepsilon,$$

which completes the proof of the necessity.

For a discussion of the frequencies in $P_n(x)$, we note that

$$(81) \qquad \frac{1}{T}\int_a^{T+a} dx\, e^{-i\lambda x}\,\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_a^{T+a} dx\, e^{-i\lambda x}\,\frac{1}{h}\int_0^{h} f(x+t)\,dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^{h} e^{i\lambda t}\,dt\,\frac{1}{T}\int_a^{T+a} f(t+x)\,e^{-i\lambda(x+t)}\,dx$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^{h} e^{i\lambda t}\,dt\,\frac{1}{T}\int_{a+t}^{T+a+t} f(z)\,e^{-i\lambda z}\,dz.$$

This, in view of the uniform convergence with respect to a of the inner average, shows that

$$M\{F(x)e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}\frac{e^{i\lambda h}-1}{i\lambda h}, \tag{82}$$

so that every frequency of $F(x)$ is a frequency of $f(x)$. Also, if we take two incommensurable values of h, and form the corresponding functions $F_1(x)$ and $F_2(x)$, every frequency of $f(x)$ will be a frequency of at least one of these functions, so that there are only an *enumerable* number of frequencies belonging to $f(x)$, for which

$$\alpha(\lambda, f) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} \neq 0.$$

We may also formulate

Corollary. *For any given approximating linear combination* (5) *such that,*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_a^{a+T}|f(x)-P_n(x)|\,dx < \varepsilon_n, \tag{83}$$

the coefficients satisfy the relation

$$|c_{nk}-\alpha(\lambda_{nk}, f)| < \varepsilon_n \tag{84}$$

so that any frequency which appears in $P_n(x)$ with a coefficient greater than ε is a frequency of $f(x)$.

This follows from the relations

$$|\alpha(\lambda, f)-\alpha(\lambda, P_n)| = \left|\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[f(x)-P_n(x)]e^{-i\lambda x}\,dx\right| \tag{85}$$

$$\leqq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T|f(x)-P_n(x)|\,dx.$$

As this also shows that every frequency of $f(x)$ with a coefficient greater than ε_n must appear in $P_n(x)$, we see that the number of frequencies of $f(x)$ with coefficients greater than any given ε is finite.

Massachusetts Institute of Technology.

(Eingegangen am 8. Januar 1928.)

Über die Tangentialräume ametrischer Mannigfaltigkeiten.

Von

Josef Lense in München.

In einer im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erschienenen Abhandlung[1]) habe ich folgenden Satz bewiesen:

„*Im Euklidischen R_n gibt es Mannigfaltigkeiten von den Dimensionen* 1 *bis* $\left[\frac{n}{2}\right]$, *deren Bogenelement*

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$$

identisch verschwindet. Dabei bedeutet $\left[\frac{n}{2}\right]$ *in bekannter Weise die größte ganze Zahl* $\leqq \frac{n}{2}$."

Ich habe diesen Gebilden den Namen ametrische Mannigfaltigkeiten gegeben. In der vorliegenden Arbeit sollen die Tangentialräume solcher Mannigfaltigkeiten untersucht werden, insbesondere folgender Satz bewiesen werden:

Eine ametrische Mannigfaltigkeit V_μ von der Dimension μ im Euklidischen R_n hat höchstens $\infty^{n-2\mu}$ Tangentialräume.

Daraus folgt sofort:

Eine ametrische V_μ kann nur dann ∞^n Tangentialräume haben, wenn $\mu \leqq \left[\frac{n}{3}\right]$ *ist. Ametrische Mannigfaltigkeiten, deren Dimensionalzahl zwischen* $\left[\frac{n}{3}\right]$ *und* $\left[\frac{n}{2}\right]$ *liegt, sind also torsenartige Gebilde.*

---

[1]) J. Lense, Über ametrische Mannigfaltigkeiten und quadratische Differentialformen mit verschwindender Diskriminante, Deutsche Math.-Ver. **35** (1926), S. 280 bis 294.

Um eine bessere Einsicht in die vorliegenden Verhältnisse zu erhalten, sollen zuerst die Grundgedanken eines synthetischen Beweises des erwähnten Satzes angedeutet und hierauf ein strenger analytischer Beweis erbracht werden. Als Abschluß mögen einige Spezialfälle betrachtet werden.

§ 1.

Synthetischer Beweis.

Es sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden: Der uneigentliche Raum des vorliegenden Euklidischen R_n ist ein linearer R_{n-1} und soll mit U_{n-1} bezeichnet werden. Das absolute Gebilde des R_n, das Analogon des absoluten Kegelschnittes im R_3, ist eine nichtsinguläre Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung von der Dimension $n-2$ und sei mit A^2_{n-2} bezeichnet. Die Schnittgebilde der im R_n gelegenen linearen Räume mit dem U_{n-1} sollen kurz die uneigentlichen Spuren dieser Räume heißen und durch obere Stellenzeiger u gekennzeichnet werden. Die ametrische Mannigfaltigkeit V_μ besitzt in jedem Punkt einen linearen Tangentialraum von der Dimension μ (Bezeichnung T_μ), Er ist der Ort aller in P an die V_μ gezogenen Tangenten. Da jede Kurve auf der V_μ isotrop ist, also auch sämtliche Tangenten der V_μ isotrop sind, muß die uneigentliche Spur $T^u_{\mu-1}$ des T_μ auf der A^2_{n-2} liegen. Daraus folgt sofort $\mu \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$.[2])

Nun soll der Normalraum im Punkte P der V_μ konstruiert werden. Dies geschieht in folgender Weise: Der T_μ läßt sich durch μ linear unabhängige, im Punkte P aufsitzende Vektoren $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots, \mathfrak{t}_\mu$ aufspannen. Ihre uneigentlichen Spuren sind μ auf der A^2_{n-2} liegende, linear unabhängige Punkte $t^u_1, t^u_2, \ldots, t^u_\mu$. Der gesuchte Normalraum wird durch $n-\mu$ linear unabhängige, in P aufsitzende Vektoren $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_{n-\mu}$ aufgespannt, die auf $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots, \mathfrak{t}_\mu$ normal stehen. Ihre uneigentlichen Spuren $n^u_1, n^u_2, \ldots, n^u_{n-\mu}$ müssen also zu $t^u_1, t^u_2, \ldots, t^u_\mu$ bezüglich der A^2_{n-2} konjugiert sein. Da aber $t^u_1, t^u_2, \ldots, t^u_\mu$ als Punkte der A^2_{n-2} zu sich selbst konjugiert sind, kann man für μ der Vektoren $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_{n-\mu}$ die Vektoren $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots, \mathfrak{t}_\mu$ wählen, d. h. als Satz ausgesprochen:

Der Normalraum ist von der Dimension $n-\mu$ (Bezeichnung $N_{n-\mu}$) *und enthält den Tangentialraum* T_μ.

Da die uneigentliche Spur $T^u_{\mu-1}$ des Tangentialraumes T_μ auf dem A^2_{n-2} liegt, ist jeder der Punkte $t^u_1, t^u_2, \ldots, t^u_\mu$ zu sich selbst und zu den übrigen konjugiert, d. h. der zu dem $T^u_{\mu-1}$ bezüglich der A^2_{n-2} gehörige

[2]) Siehe z. B. E. Bertini, Einführung in projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. Deutsch herausgegeben von A. Duschek, Wien (1924): L. W. Seidel und Sohn, S. 139.

Polarraum enthält den $T^u_{\mu-1}$, berührt in ihm die A^2_{n-2} und ist gerade die uneigentliche Spur $N^u_{n-\mu-1}$ des Normalraumes $N_{n-\mu}$. Denn alle seine Punkte sind zu den Punkten des $T^u_{\mu-1}$ konjugiert.

Da der $N^u_{n-\mu-1}$ die A^2_{n-2} im $T^u_{\mu-1}$ berührt, liegen in ihm auch die uneigentlichen Spuren der zum T_μ benachbarten Tangentialräume, d. h. *der Normalraum enthält außer dem Tangentialraum auch sämtliche benachbarten Tangentialräume.* Daraus ergibt sich unmittelbar: *Jeder Tangentialraum der ametrischen V_μ liegt in dem zugehörigen Normalraum und in sämtlichen benachbarten Normalräumen.*

Wir nehmen nun an, die ametrische V_μ habe ∞^ν Tangentialräume T_μ. Dann hat sie auch ∞^ν Normalräume $N_{n-\mu}$. Wir denken uns die V_μ samt ihren Tangential- und Normalräumen aus einem $R_{\mu-2}$ durch lineare $R_{\mu-1}$ auf einen $R_{n-\mu+1}$ projiziert. Dabei bleibt Inzidenz und Berührung erhalten. Die Projektionen sollen mit Strichen bezeichnet werden. Wir erhalten also in dem $R_{n-\mu+1}$ eine V'_μ, die von den T'_μ und $N'_{n-\mu}$ berührt wird. Jeder T'_μ liegt im zugehörigen $N'_{n-\mu}$ und in den benachbarten, das Schnittgebilde des $N'_{n-\mu}$ und seiner benachbarten ist aber von der Dimension $n-\mu-\nu$. Denn der $N'_{n-\mu}$ ist durch eine Gleichung in $n-\mu+1$ Veränderlichen gegeben, die noch von ν unabhängigen Parametern abhängt, gemäß der Tatsache, daß es im ganzen $\infty^\nu N'_{n-\mu}$ gibt. Die Gleichungen des erwähnten Schnittgebildes bekommt man, in dem man die Gleichung des $N'_{n-\mu}$ partiell nach den ν Parametern differenziert und die so erhaltenen Gleichungen mit der des $N'_{n-\mu}$ zusammenbestehen läßt. Da der T'_μ in diesem Schnittgebilde liegt, muß $\mu \leqq n-\mu-\nu$, daher $\nu \leqq n-2\mu$ sein. Das sind die synthetischen Überlegungen, die zum erwähnten Satz führen.

§ 2.

Analytischer Beweis.

Die im vorigen Paragraphen entwickelten Gedankengänge sind jetzt in Formeln zu kleiden. Die ametrische V_μ sei gegeben in Parameterform und Vektordarstellung durch Gleichung (1)

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u_1, u_2, \ldots, u_\mu). \tag{1}$$

Dabei ist

$$d\mathfrak{x}^2 = 0, \tag{2}$$

daher

$$\mathfrak{x}_{u_\alpha}\mathfrak{x}_{u_\beta} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \mu). \tag{3}$$

Differenziert man die Gleichungen (3) nach u_γ und vertauscht α, β, γ zyklisch untereinander, so erhält man

$$\mathfrak{x}_{u_\alpha}\mathfrak{x}_{u_\beta u_\gamma} = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{4}$$

Weil die Gleichung (1) eine V_μ darstellt, sind die Vektoren $\mathfrak{x}_{u_\alpha}$ voneinander linear unabhängig. Sie spannen den Tangentialraum T_μ im Punkt $P(u_1, u_2, \ldots, u_\mu)$ auf. Ein beliebiger Punkt dieses T_μ wird gegeben durch den Vektor

$$\mathfrak{x} + \sum_{\alpha=1}^{\mu} \lambda_\alpha \mathfrak{x}_{u_\alpha}. \tag{5}$$

Die λ_α sind beliebige konstante Parameter.

Bedeuten $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_{n-\mu}$ $n-\mu$ linear unabhängige Vektoren, die den Normalraum $N_{n-\mu}$ im Punkte P aufspannen, und $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-\mu}$ ebenso viele konstante Parameter, so wird der Normalraum gegeben durch den Vektor

$$\mathfrak{x} + \sum_{i=1}^{n-\mu} \mu_i \mathfrak{n}_i. \tag{6}$$

Wegen der Gleichungen

$$\mathfrak{n}_i \mathfrak{x}_{u_\alpha} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-\mu;\ \alpha = 1, 2, \ldots, \mu)$$

kann man mit Rücksicht auf die Gleichungen (3) und (4) für einen Teil der Vektoren $\mathfrak{n}_i$ die linear unabhängigen der Vektoren $\mathfrak{x}_{u_\alpha}$ und $\mathfrak{x}_{u_\alpha u_\beta}$ wählen, so daß sich (6) auch schreiben läßt:

$$\mathfrak{x} + \sum_{\alpha=1}^{\mu} \mu_\alpha \mathfrak{x}_{u_\alpha} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{\mu} \mu_{\alpha\beta} \mathfrak{x}_{u_\alpha u_\beta} + \sum_{(\sigma)} \nu_\sigma \mathfrak{n}_\sigma. \tag{7}$$

Dabei bedeuten die μ_α, $\mu_{\alpha\beta}$, ν_σ konstante Parameter. Die letzte Summe ist über die übrigen $\mathfrak{n}_i$ zu erstrecken, die sich nicht als Linearkombinationen der $\mathfrak{x}_{u_\alpha}$ und $\mathfrak{x}_{u_\alpha u_\beta}$ darstellen lassen. Aus (5) und (6) folgt: *Der Tangentialraum liegt im Normalraum.*

Wir betrachten jetzt den Tangentialraum $\bar{T}_\mu$ und den Normalraum $\bar{N}_{n-\mu}$ in einem Nachbarpunkte $\bar{P}$ mit den Parametern $u_1 + h_1, u_2 + h_2, \ldots, u_\mu + h_\mu$. Wir setzen $\mathfrak{x}$ regulär analytisch in der Umgebung des Punktes P voraus und entwickeln die Vektoren für $\bar{T}_\mu$ und $\bar{N}_{n-\mu}$ bis auf Glieder erster Ordnung in den h. Man erhält für den Vektor, der den $\bar{T}_\mu$ darstellt (die Parameter λ seien hier mit $\bar{\lambda}$ bezeichnet),

$$\mathfrak{x} + \sum_{\alpha=1}^{\mu} (\bar{\lambda}_\alpha + h_\alpha) \mathfrak{x}_{u_\alpha} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{\mu} \bar{\lambda}_\alpha h_\beta \mathfrak{x}_{u_\alpha u_\beta}, \tag{8}$$

und für den Vektor, der den Normalraum $\bar{N}_{n-\mu}$ darstellt (die Parameter werden wieder mit Querstrichen versehen),

$$\mathfrak{x} + \sum_{\alpha=1}^{\mu} (\bar{\mu}_\alpha + h_\alpha) \mathfrak{x}_{u_\alpha} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{\mu} (\bar{\mu}_{\alpha\beta} + \bar{\mu}_\alpha h_\beta) \mathfrak{x}_{u_\alpha u_\beta} + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{\mu} \bar{\mu}_{\alpha\beta} h_\gamma \mathfrak{x}_{u_\alpha u_\beta u_\gamma} \tag{9}$$
$$+ \text{Glieder in den } \mathfrak{n}_\sigma \text{ und ihren Differentialquotienten.}$$

Setzt man

$$(10)\qquad \begin{cases} \mu_\alpha = \bar{\lambda}_\alpha + h_\alpha, \\ \mu_{\alpha\beta} = \bar{\lambda}_\alpha h_\beta, \\ \nu_\sigma = 0, \end{cases}$$

so folgt aus (7) und (8):

Der Tangentialraum eines Nachbarpunktes $\bar{P}$ liegt im Normalraum des Punktes P.

Setzt man dagegen

$$(11)\qquad \begin{cases} \bar{\mu}_\alpha = \lambda_\alpha - h_\alpha, \\ \bar{\mu}_{\alpha\beta} = -\lambda_\alpha h_\beta, \end{cases}$$

und die Koeffizienten der Glieder in den π_σ und ihren Differentialquotienten $= 0$, so folgt aus (5) und (9):

Der Normalraum eines Nachbarpunktes $\bar{P}$ enthält den Tangentialraum im Punkte P.

Beide Aussagen gelten natürlich nur bis auf Glieder erster Ordnung in den h.

Wir nehmen nun an, die V_μ habe ∞^ν Tangentialräume T_μ und daher ∞^ν Normalräume $N_{n-\mu}$, und denken uns die V_μ orthogonal auf einen Koordinatenraum $R_{n-\mu+1}$ projiziert[3]). Die Projektionen sollen durch einen Strich gekennzeichnet werden, also V'_μ, T'_μ, $N'_{n-\mu}$. Da bei der Projektion Inzidenz und Berührung erhalten bleiben, liegt der T'_μ eines Punktes auch in den $N'_{n-\mu}$ sämtlicher Nachbarpunkte. Ein $N'_{n-\mu}$ ist als linearer $R_{n-\mu}$ in einem Koordinaten-$R_{n-\mu+1}$ durch eine lineare Gleichung in $n-\mu+1$ der Veränderlichen x gegeben, deren Koeffizienten noch von den Parametern $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ abhängen, also durch

$$(12)\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\mu+1};\ u_1, u_2, \ldots, u_\mu) = 0.$$

Für einen $N'_{n-\mu}$ eines Nachbarpunktes erhalten wir daher

$$(13)\qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\mu+1};\ u_1, u_2, \ldots, u_\mu) + \sum_{\alpha=1}^{\mu} h_\alpha \frac{\partial f}{\partial u_\alpha}$$
$$+ \text{Glieder höherer Ordnung in den } h = 0.$$

Da der T'_μ im zugehörigen $N'_{n-\mu}$ liegt, gilt für die Punkte $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\mu+1})$ des T'_μ

$$(14)\qquad f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\mu+1};\ u_1, u_2, \ldots, u_\mu) = 0.$$

---

[3]) Der Gedanke, den Beweis durch diese Art von Projektion zu führen, stammt von Herrn K. Brauner.

Ferner genügen die ξ bis auf Glieder zweiter und höherer Ordnung in den h auch der Gleichung (13) für beliebige, entsprechend kleine h. Macht man mit den h den Grenzübergang nach 0, so ergibt sich, daß die Koordinaten ξ der Punkte des T'_μ die Gleichungen

$$(15) \qquad f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial u_2}=0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial u_\mu}=0$$

erfüllen. Von diesen Gleichungen sind nur $\nu+1$ voneinander unabhängig, weil zufolge der Annahme von $\infty^\nu N_{n-\mu}$ in der Gleichung eines $N_{n-\mu}$ die Parameter u nur in ν voneinander unabhängigen Kombinationen auftreten können. Die Gleichungen (15) stellen daher einen linearen $R_{n-\mu-\nu}$ dar. In diesem liegt der T'_μ, daher ist

$$(16) \qquad \mu \leqq n-\mu-\nu \quad \text{oder} \quad \nu \leqq n-2\mu.$$

Damit ist der behauptete Satz auf analytischem Wege bewiesen.

§ 3.

Isotrope Torsen im R_n.[4])

Nach den Ergebnissen der §§ 1 und 2 sind die ametrischen Mannigfaltigkeiten höchster Dimension eines Euklidischen Raumes von ungerader Dimension, also eines $R_{2\mu+1}$, von der Dimension μ und haben ∞^1 Tangentialräume T_μ. Wir können sie als Hüllgebilde der Schmiegräume einer Kurve des $R_{2\mu+1}$ auffassen. Es dürfte daher am Platze sein, die Erzeugnisse der Schmiegräume einer Raumkurve des R_n allgemein zu betrachten.

Die Kurve sei gegeben durch die Vektorgleichung

$$(17) \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u_1).$$

Sämtliche auftretenden Funktionen werden wieder in der Umgebung des betrachteten Punktes P mit dem Parameter u_1 als regulär analytisch vorausgesetzt. Der Schmieg-$R_{\mu-1}$ der Kurve (17) wird gegeben durch den Vektor

$$(18) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u_1) + u_2\,\mathfrak{y}'(u_1) + u_3\,\mathfrak{y}''(u_1) + \ldots + u_\mu\,\mathfrak{y}^{(\mu-1)}(u_1).$$

Selbstverständlich wird immer lineare Unabhängigkeit der auftretenden Ableitungen des Vektors $\mathfrak{y}$ vorausgesetzt.

[4]) Die Ausführungen dieses Paragraphen bilden den Hauptteil der nicht veröffentlichten Doktordissertation meiner Frau Eugenie Lense, geb. Krenbauer, Über ametrische und isotrope Torsen, Wien 1927. Sämtliche Zwischenrechnungen sind aus gelassen.

Bei festem u_1 und veränderlichen $u_2, u_3, \ldots, u_\mu$ beschreibt der Punkt den Schmieg-$R_{\mu-1}$. Lassen wir auch u_1 variieren, so erhalten wir eine V_μ, die von den Schmieg-$R_{\mu-1}$ der Kurve (17) erzeugt wird. Wie man sich leicht überzeugt, ist der Schmieg-R_μ der Kurve im Punkt P Tangential-R_μ der V_μ und berührt sie in jedem Punkte des zum Punkte P gehörigen Schmieg-$R_{\mu-1}$. Die V_μ ist also eine Torse.

Ähnlich ergibt sich:

Der Schmieg-R_m $(m \geqq \mu)$ der Kurve im Punkte u_1 ist gleichzeitig Schmieg-R_m der Torse in jedem Punkte mit demselben Parameter u_1 bei beliebigen Werten von $u_2, u_3, \ldots, u_\mu$.

Wir wollen die Kurve und Torse *p-fach isotrop* nennen, wenn alle Ableitungen des Kurvenvektors $\mathfrak{y}$ bis zur p-ten isotrop sind, d. h. wenn die Gleichungen gelten

$$\text{(19)} \qquad \mathfrak{y}'^2 = 0, \quad \mathfrak{y}''^2 = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{y}^{(p)2} = 0, \quad \text{aber} \quad \mathfrak{y}^{(p+1)2} \neq 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgen durch Differentiation und durch den Schluß von n auf $n+1$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{y}'\mathfrak{y}'' = 0, \quad \mathfrak{y}''\mathfrak{y}''' = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{y}^{(p)}\mathfrak{y}^{(p+1)} = 0,\\
&\mathfrak{y}'\mathfrak{y}''' = 0, \quad \mathfrak{y}''\mathfrak{y}^{IV} = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{y}^{(p)}\mathfrak{y}^{(p+2)} \neq 0,\\
&\cdots\cdots\cdots

Nach (20) ist nämlich die uneigentliche Spur y^u_{p+1} des Vektors $\mathfrak{y}^{(p+1)}$ zu den Spuren $y^u_1, y^u_2, \ldots, y^u_p$ bezüglich der A^2_{n-2} konjugiert, liegt also auf den Tangentialhyperebenen dieser Punkte, daher auch auf dem Schnittgebilde dieser Tangentialhyperebenen. Dieses Schnittgebilde ist ein R^u_{n-p-1}. Der durch die Punkte $y^u_1, y^u_2, \ldots, y^u_{p+1}$ bestimmte R^u_p muß auf diesem R^u_{n-p-1} liegen, weil jede der Tangentialhyperebenen sämtliche Punkte $y^u_1, y^u_2, \ldots, y^u_p$ enthält. Es muß daher

$$p \leqq n-p-1 \quad \text{oder} \quad p \leqq \frac{n-1}{2}$$

sein, d. h., weil p immer eine ganze Zahl ist, $p < \frac{n}{2}$, wie behauptet wurde.

Zufolge der Gleichungen (19) und (20) sind aus analogen Gründen sämtliche Schmiegräume der Kurve (17) bis zur Dimension μ ametrisch. Denn ihre uneigentlichen Gebilde liegen auf der A^2_{n-2}.

Für Schmiegräume höherer Dimension gelten folgende Sätze: *Es sei* $1 \leqq q \leqq p$. *Der uneigentliche* R^u_{p+q-1} *des Schmieg-*R_{p-q} *berührt die absolute* A^2_{n-2} *im uneigentlichen* R^u_{p-q} *des Schmieg-*R_{p-q+1}. Denn aus den Gleichungen (19) und (20) folgt: Die den R^u_{p-q} bestimmenden Punkte $y^u_1, y^u_2, \ldots, y^u_{p-q+1}$ sind untereinander bezüglich der A^2_{n-2} konjugiert. Ferner sind die untereinander linear unabhängigen Punkte $y^u_{p-q+2}, y^u_{p-q+3}, \ldots, y^u_{p+q}$ zu den Punkten $y^u_1, y^u_2, \ldots, y^u_{p-q+1}$ konjugiert. Aus beiden Sätzen folgt sofort die Behauptung. Ist also $\mu \leqq p$, so sind sämtliche Schmiegräume bis zur Dimension μ und daher auch die V_μ ametrisch.

Berechnet man unter Berücksichtigung der Gleichungen (19) und (20) das quadrierte Bogenelement der V_μ, so ergibt sich folgender Satz: *Ist* $p+1 \leqq \mu \leqq 2p$, *so ist die quadratische Differentialform, durch die das Bogenelement dargestellt wird, vom Rang* $r \leqq 2\mu - 2p - 1$ *und von der Klasse* $k \leqq 2\mu - 2p$.[5]) Im allgemeinen, d. h. solange nicht weitere Bedingungen gestellt werden, gelten in den Formeln für r und k die Gleichheitszeichen. Es entsprechen somit im allgemeinen den Zahlen

$$\mu = 1, 2, \ldots, p, p+1, p+2, \ldots, \quad 2p, \quad 2p+1, 2p+2, \ldots$$

die Zahlen

$$r = 0, 0, \ldots, 0, \quad 1, \quad 3, \quad \ldots, 2p-1, 2p+1, 2p+2, \ldots$$

und

$$k = 0, 0, \ldots, 0, \quad 2, \quad 4, \quad \ldots, \quad 2p, \quad 2p+1, 2p+2, \ldots .$$

Die betrachteten Torsen sind also Beispiele für Mannigfaltigkeiten des Euklidischen R_n, bei denen die Diskriminante des quadrierten Bogenelementes verschwindet. Die Charakteristik ist $(2\mu - 2p - 1, 2\mu - 2p)$.[5])

[5]) Bezüglich der Bezeichnungen Rang, Klasse, Charakteristik vgl. J. Lense, a. a. O. S. 288.

Für den R_3, R_4, R_5, R_6 sind in der folgenden Tabelle alle möglichen allgemeinen Fälle zusammengestellt:

Tabelle.

	p	μ	r	k
R_3	1	2	1	2
R_4	1	2	1	2
	1	3	3	3
R_5	1	2	1	2
	1	3	3	3
	1	4	4	4
	2	2	0	0
	2	3	1	2
	2	4	3	4
R_6	1	2	1	2
	1	3	3	3
	1	4	4	4
	1	5	5	5
	2	2	0	0
	2	3	1	2
	2	4	3	4
	2	5	5	5

(Eingegangen am 10. Februar 1928.)

Über die Bewegung eines kleinen starren Probekörpers in beliebig vorgegebenen Gravitationsfeldern.

Von

G. Thomsen in Hamburg.

Kapitel I.

Über die relativistische Mechanik der holonomen Systeme.

§ 1.

Wenn wir die Bewegung eines Planeten um die Sonne mittels der Schwarzschildschen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen bestimmen, nehmen wir den Planeten als einen materiellen Punkt an, der das Feld nicht stört. Wir erhalten dabei keine Aufklärung über eine eventuelle Rotation des Planeten während der Bewegung, das heißt über die augenblickliche Orientierung eines mit dem Planeten fest verbundenen Achsensystems.

In dieser Arbeit soll nun eine Theorie aufgestellt werden, die auch der Änderung der Orientierung des Planeten während der Bewegung Rechnung tragen soll. Im Kapitel I wollen wir ein dynamisches Prinzip aufstellen, das die Mechanik holonomer Systeme in der allgemeinen Relativitätstheorie regeln soll. Dieses Prinzip stammt von Herrn Levi-Civita, der mir die Anregung zu dieser Arbeit gegeben hat. Er hat mich überhaupt in sehr weitgehendem Maße unterstützt und von ihm stammen auch sonst viele wesentliche Gedanken dieser Arbeit,

Im Kapitel II werden wir den Begriff des starren Körpers in der allgemeinen Relativitätstheorie fixieren. Auf Grund der physikalischen Tatsachen muß es ohne Zweifel auch in der relativistischen Mechanik etwas den gewöhnlichen starren Körpern sehr Ähnliches und in präzise Definitionen Faßbares geben. Aus der Riemannschen Geometrie wissen wir nun: Abgesehen von den Räumen konstanter Krümmung können in den Riemannschen Räumen keine kontinuierlichen Punktsysteme existieren, die sich

ohne Änderung ihrer Gestalt mit 6 Freiheitsgraden bewegen können. Diese Bedingung kann man nur im Unendlichkleinen verwirklichen, d. h. wenn man das von dem System eingenommene Gebiet als unendlich klein voraussetzt. Wir werden daher die Starrheit in sinnvoller Weise nur für Punktsysteme definieren können, die einen sehr kleinen Bereich, mathematisch gesprochen, einen infinitesimalen Bereich einnehmen.

Von diesem Gesichtspunkt aus werden wir den Planeten als einen Probekörper behandeln, der das Feld nicht stört und dessen Dimensionen sehr klein sind im Verhältnis zu denen des Gebiets, in dem sich die Bewegung vollzieht. Den kleinen von dem starren Körper eingenommenen Bereich betrachtet man dabei als ein System materieller Punkte, das gewissen Bindungen unterworfen ist. Für die Definition dieser Bindungen sind dabei sowohl mathematische wie mechanische Gesichtspunkte maßgebend, im besonderen hat man den Grundideen der allgemeinen Relativitätstheorie Rechnung zu tragen.

Während das Kapitel II den Grundlagen der Kinematik des starren Körpers gewidmet ist, wird sich das Kapitel III mit der Dynamik des starren Körpers beschäftigen. Wir werden dabei das im Kapitel I aufgestellte dynamische Prinzip zur Anwendung bringen und die allgemeinen Bewegungsgleichungen für die Bewegung eines starren Probekörpers in beliebigen Gravitationsfeldern aufstellen.

Im Kapitel IV machen wir zum Schluß eine Anwendung der Theorie auf die Rotationsbewegung der Erde.

§ 2.

Wir beginnen mit den allgemeinen Ausführungen über die Einführung holonomer Bindungen in die relativistische Mechanik. Das wesentliche Resultat ist, wie wir sehen werden, in der Formel (9) enthalten, auf deren Ableitung und Bedeutung wir jetzt zu sprechen kommen.

In der klassischen Mechanik pflegen wir die holonomen Bindungen, denen ein System von N materiellen Punkten x_ν $[\nu = 1 \dots N]$ mit den Koordinaten x_ν^α $[\alpha = 1, 2, 3]$ und den Massen m_ν unterworfen ist, durch Gleichungen von der Form

$$x_\nu^\alpha = \varphi_\nu^\alpha(q_1, q_2 \cdots q_n, t) \tag{1}$$

darzustellen, wo n der Freiheitsgrad des Systems ist, $q_1, q_2 \cdots q_n$ als Lagrangesche Koordinaten und t als die Zeit (in ihrer gewöhnlichen Bedeutung) aufzufassen sind. Bekanntlich kann man dann die Bewegung des Systems bestimmen aus dem Hamiltonschen Variationsprinzip

$$\delta \int (U + T)\, dt = 0 \tag{2}$$

mit

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} T_\nu, \tag{2a}$$

wo

$$T_\nu = \frac{1}{2} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2} m_\nu \cdot \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{dx_\nu^\alpha}{dt}\right)^2 \tag{2b}$$

die kinetische Energie des ν-ten materiellen Punktes ist und U das Gesamtpotential aller der (als konservativ vorausgesetzten) Kräfte, die auf die verschiedenen Punkte des Systems wirken. Man hat die Gleichung (2) in der folgenden Weise zu verstehen: Man hat in (2) T und U mittels der Gleichungen (1) durch die q, $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ und t auszudrücken und (2) als Variationsprinzip für die n Funktionen $q(t)$ aufzufassen. Man hat aus ihm dann die Differentialgleichungen von Euler und Lagrange für die Funktionen $q(t)$ abzuleiten, die uns alle möglichen Bahnkurven der gebundenen Bewegung liefern. Bekanntlich ist das Prinzip (2) dem Prinzip der virtuellen Arbeit äquivalent und stellt die einzige neue Hypothese dar, die man den Prinzipien der Mechanik der freien Punkte hinzufügen muß, wenn man zur Behandlung allgemeiner holonomer Systeme übergeht.

§ 3.

Um in unserer relativistischen Mechanik ein Postulat einzuführen, das der Hypothese (2) entspricht, gehen wir von der Tatsache aus, daß für einen freien Punkt die in einem gegebenen Gravitationsfeld möglichen Bewegungen als Extremalen des Variationsprinzips

$$\delta \int ds = 0 \qquad \left[ds^2 = \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}\, dx^i\, dx^k\right] \tag{3}$$

bestimmt sind. Wenn wir dem Punkt x einen konstanten Massenkoeffizienten (Ruhmasse) beilegen und annehmen, daß der Punkt selbst das Feld nicht merklich stört, können wir anstatt von (3) auch

$$\delta \int m\, ds = 0 \tag{4}$$

schreiben. In erster Annäherung ergibt sich aus (3) oder (4) bekanntlich[1]) das Gesetz:

$$\delta \int (U + T)\, dt = 0, \tag{5}$$

das in der klassischen Mechanik die Bewegung des materiellen Punktes mit der lebendigen Kraft T bei gegebenem Potential U bestimmt.

[1]) Siehe z.B. Levi-Civita, „The absolut differential calculus“ (Glasgow, Blackie, 1927), p. 287—294.

Wenn wir N freie Punkte x_ν mit den Ruhmassen m_ν haben, gilt für jeden von ihnen auf Grund von (4) das Bewegungsgesetz:

$$\delta \int m_\nu \, ds_\nu = 0 , \tag{6}$$

in dem

$$ds_\nu^2 = \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}(x_\nu) \, dx_\nu^i \, dx_\nu^k \tag{7}$$

natürlich das Quadrat des Linienelements ist, das sich auf die Weltlinie des Punktes x_ν bezieht.

Gehen wir jetzt zu Systemen mit holonomen Bedingungen über, so müssen wir uns die Bindungen in der Form gegeben denken:

$$x_\nu^i = \varphi_\nu^i(q_1 \dots q_n) \qquad \begin{bmatrix} i = 0, 1, 2, 3 \\ \nu = 1 \dots N \end{bmatrix}, \tag{8}$$

wo die Zeitkoordinaten in ganz allgemeiner Art mit den räumlichen Koordinaten zusammen auftreten.

In der klassischen Mechanik geht man von dem Prinzip (5), das für jeden einzelnen freien Punkt gültig ist, in *additiver* Weise zu dem Prinzip (2) für gebundene Systeme über. In gleicher Weise werden wir in der relativistischen Mechanik vorgehen, indem wir für gebundene Systeme an Stelle von (6) das additive Variationsprinzip

$$\boxed{\delta \int \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, ds_\nu = 0} \tag{9}$$

annehmen.

Mittels der Gleichungen (8) müssen wir in (7) die x_ν durch die q ausdrücken. Unter dem Integral in (9) erhält man dann einen Ausdruck in den q und ihren Differentialen dq, und zwar ist er in den letzteren homogen vom ersten Grade. Denkt man sich die q als Funktionen eines Hilfsparameters τ, so erhält man einen Ausdruck in der Form

$$\delta \int L(q, \dot{q}) \, d\tau = 0 \qquad \left[\dot{q} = \frac{dq}{d\tau}\right], \tag{10}$$

und es gilt:

Die Weltlinien eines Systems von Punkten, die den Bindungen (8) unterworfen sind, sind die Extremalen des Variationsprinzips (10), das auf die Funktionen $q(\tau)$ zu beziehen ist.

§ 4.

Um die Annahme von (9) zu rechtfertigen, wird es genügen, zu zeigen, daß man mit derselben Annäherung, mit der man (5) aus (4) gewinnt, die Formel (2) der gewöhnlichen Mechanik der gebundenen Systeme erhält.

Bekanntlich[2]) kann man in erster Annäherung das Linienelement unserer physikalischen Welt in der Form

$$(11) \qquad ds^2 = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)(dx^0)^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \cdot \sum_{\alpha=1}^{3} (dx^\alpha)^2$$

annehmen, wo U eine Funktion der räumlichen Koordinaten x^1, x^2, x^3 ist — und zwar eine Funktion, die im ganzen Gebiet außerhalb der potenzierenden Massen harmonisch ist — und c die Lichtgeschwindigkeit.

Setzen wir

$$(12) \qquad x^0 = c \cdot t,$$

so erhalten wir

$$(13) \qquad \left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2 = 1 - \frac{1}{c^2}(2U + v^2) + \frac{1}{c^4}(\ldots),$$

wo wir $v^2 = \sum_\alpha \left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)^2$ setzen und die Glieder von höherer als dritter Ordnung in dem Verhältnis $v : c$ vernachlässigen.

Aus (13) folgt

$$(14) \qquad m \cdot \frac{ds}{dx^0} = \frac{m}{c} \cdot \frac{ds}{dt} = m - \frac{1}{c^2}\left(mU + \frac{m}{2} v^2\right) + \ldots .$$

[Für den freien Punkt erlaubt diese Formel sofort von (4) zu (5) mit $T = \frac{1}{2} m v^2$ und mit dem Potential U überzugehen.]

Für ein System von N Punkten bekommt man analog aus (14):

$$(15) \qquad \frac{1}{c} m_\nu ds_\nu = m_\nu dt_\nu - \frac{1}{c^2}(m_\nu U_\nu + T_\nu)\, dt_\nu + \ldots,$$

wo T_ν nach (2a) die kinetische Energie des ν-ten Punktes darstellt, und wo

$$x_\nu^0 = c \cdot t_\nu$$

gesetzt ist.

In Wirklichkeit betrachtet man in der gewöhnlichen Mechanik nun nur holonome Bindungen der speziellen Form

$$(16) \qquad \begin{cases} x_\nu^\alpha = \varphi_\nu^\alpha(q_1 \ldots q_n, t) & [\alpha = 1, 2, 3], \\ x_\nu^0 = c \cdot t_\nu = c \cdot t \quad \text{für alle } \nu, \end{cases}$$

mit den $n + 1$ Lagrangeschen Parametern $q_1 \ldots q_n$ und t. Berücksichtigen wir diese Tatsache und (14), so erhalten wir aus (15)

$$(17) \qquad \frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu ds_\nu = \sum_\nu m_\nu dt - \frac{1}{c^2}\left[\sum_\nu (m_\nu U_\nu + T_\nu)\right] dt + \ldots,$$

---

[2]) Siehe z. B. Levi-Civita, loc. cit. Kap. XII Nr. 6.

womit man auf Grund der Konstanz von $\sum_\nu m_\nu$ und c aus (9) genau die Formel (2) der klassischen Mechanik erhält, in der man

$$U = \sum_\nu m_\nu U_\nu$$

zu nehmen hat.

§ 5.

Besonderes Interesse verdient der spezielle Fall eines einzigen Punktes x, dessen Koordinaten den Bindungen unterworfen sind:

$$x^i = x^i(q_1, q_2, q_3) \qquad [i = 0, 1, 2, 3], \tag{18}$$

das heißt der Fall eines Punktes, der gezwungen ist sich auf einer Hyperfläche der raumzeitlichen Welt zu bewegen[3]). Das Prinzip (9) liefert als Weltlinien des Punktes x die geodätischen Linien der Hyperfläche. Man erhält ein analoges Resultat, wenn man annimmt, daß der Punkt gezwungen ist sich auf einer 2-dimensionalen Fläche zu bewegen.

Es existieren bereits zwei Arbeiten, die holonome Systeme in der relativistischen Mechanik behandeln. Die eine[4]) behandelt den speziellen Fall (18) in der speziellen Relativitätstheorie, die andere[5]) den allgemeinen Fall, indem sie das Prinzip (9) rein formal, ohne mechanische Rechtfertigung ansetzt.

Kapitel II.

Über die Kinematik der starren Körper in der allgemeinen Relativitätstheorie.

§ 1.

Wir wollen jetzt den relativistischen Begriff der Starrheit der Bewegung eines materiellen Punktsystems einführen. Dabei heben wir wieder hervor: Während man nach der klassischen Definition — und in gewissem Sinne auch nach den Auffassungen der speziellen Relativitätstheorie[6]) — beliebig ausgedehnte Körper betrachten kann, muß man sich in der allgemeinen Relativitätstheorie notwendigerweise auf Punktsysteme beschränken, deren Weltlinien sehr nahe benachbart sind.

---

[3]) Damit es sich um eine wirkliche Bewegung handelt, muß die Hyperfläche (18) ein indefinites („zeitartiges") Bogenelement haben.

[4]) P. Adam, Resoluçiòn de algunos problemas elementales en mécanica relativista restringida, Publicaciones del laboratorio y seminario matematico, Madrid 1923.

[5]) Th. de Donder, Application de la relativité aux systèmes atomiques et moléculaires, Comptes Rendus **182** (1926), p 1380—1382.

[6]) Über den Begriff des starren Körpers in der speziellen Relativitätstheorie vgl. M. Born, Phys. Zeitschr. **11** (1910), S. 233 und Göttinger Nachrichten 1910.

In der klassischen Mechanik pflegt man die Bewegung des starren Körpers zu zerlegen in eine durch einen beliebigen seiner Punkte, etwa P, vollführte Bewegung — meistens wählt man den Schwerpunkt — und in eine Rotation um diesen Punkt P:

Wenn man allgemein mit $\bar{x}^\alpha\,(\alpha = 1, 2, 3)$ die kartesischen Koordinaten eines beliebigen Punktes bezüglich eines raumfesten Systems bezeichnet und speziell mit x^α die von P, so ist die Bewegung von P durch die Funktionen von $x^\alpha(t)$ bestimmt, wo t die Zeit bedeutet. Denken wir uns ein zweites bewegliches Achsensystem mit dem Ursprung in P und mit Achsen, die immer zu den festen Achsen parallel sind! Nennen wir die Koordinaten eines Punktes, der in dem raumfesten System die Koordinaten $\bar{x}^\alpha$ hat, bezüglich dieses beweglichen Systems η^α, so gelten offenbar die Gleichungen:

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha(t) + \eta^\alpha \qquad [\alpha = 1, 2, 3]. \tag{1}$$

Es stellt sich nun die Bewegung des Körpers im System η^α als eine Rotationsbewegung um den festen Punkt P dar. Führen wir noch ein drittes System von körperfesten Achsen Pz_1, Pz_2, Pz_3 ein, so sind die Koordinaten z^α eines beliebigen Punktes mit den η^α durch Formeln:

$$\eta^\alpha = \sum_{\gamma=1}^{3} \xi_\gamma^\alpha(t) \cdot z^\gamma \qquad [\alpha = 1, 2, 3] \tag{2}$$

verbunden, wo die $\xi_\gamma^\alpha = \cos(\eta^\alpha z^\gamma)$ die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution sind, die nach Maßgabe der Rotationsbewegung des starren Körpers mit der Zeit veränderlich sind. Die ξ_γ^α genügen — in jedem Augenblick t — den Gleichungen:

$$\delta_{\alpha\beta}\,\xi_\gamma^\alpha\,\xi_\varepsilon^\beta = \delta_{\gamma\varepsilon} \tag{3}$$

mit

$$\delta_{\gamma\varepsilon} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \gamma = \varepsilon \\ 0 & \text{für} \quad \gamma \neq \varepsilon, \end{cases}$$

wobei wir das Summenzeichen weglassen. Auch im folgenden werden wir häufig das Summenzeichen weglassen, wenn ein Index doppelt in einem Produkt vorkommt.

§ 2.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein: Die griechischen Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \varrho, \sigma$ nehmen die Werte 1, 2, 3 an, die lateinischen Indizes i, k, l, s, p, q allgemeiner die Werte 0, 1, 2, 3, der besondere Index ν läuft von 1 bis N, wo N die Zahl der materiellen Punkte unseres starren Systems bezeichnet.

Kehren wir zu unseren Gleichungen (2) zurück, so können wir uns das System der Richtungskosinus ξ_γ^α etwa mittels der drei Eulerschen Winkel ausgedrückt denken. Die neun Größen ξ_γ^α hängen also nur von drei unabhängigen Parametern ϑ^1, ϑ^2, ϑ^3 ab. Aus (1) und (2) folgt für den Übergang von den z^α zu den $\bar{x}^\alpha$:

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha(t) + \xi_\gamma^\alpha(t) \cdot z^\gamma. \tag{5}$$

Also gelten, wenn wir N materielle Punkte unseres starren Körpers mit den Koordinaten $\bar{x}_\nu^\alpha$ ($\nu = 1, 2, \ldots N$) haben, für jeden von ihnen Relationen vom Typ (5):

$$\bar{x}_\nu^\alpha = x^\alpha(t) + \xi_\gamma^\alpha(t) z_\nu^\gamma, \tag{6}$$

wobei die z_ν^γ die auf die körperfesten Achsen bezogenen Koordinaten sind. *Die Starrheit des Systems kommt dann in der klassischen Mechanik bekanntlich in der Tatsache zum Ausdruck, daß die z_ν^γ konstant sind während des ganzen Verlaufes der Bewegung.* Also braucht man sich, um die Bewegung unseres Punktsystems zu beschreiben, nicht mit den drei N-Funktionen $\bar{x}_\nu^\alpha(t)$ zu befassen, sondern es genügt, insgesamt sechs Funktionen anzugeben: Die drei $x^\alpha(t)$ und die drei $\vartheta^\alpha(t)$, die in den $\xi_\gamma^\alpha(t)$ enthalten sind. Die z_ν^γ sind dabei als bekannte Konstante anzusehen, die die einzelnen Punkte im Körper festlegen.

Wenn wir annehmen, daß die Bewegung in einem Kräftefeld verläuft, das sich aus einem Potential U ableiten läßt, so können wir bekanntlich die Bewegungsgleichungen des starren Körpers aus dem in der Formel (2) des Kapitels I angegebenen Variationsprinzips von Hamilton ableiten. Die sechs unabhängigen Größen, die in den x^α und in den ξ_γ^α enthalten sind, spielen dabei die Rolle der Lagrangeschen Parameter. Wenn wir den Ausdruck (2) des Kapitels I bilden, so treten die z_ν^γ nur in den Kombinationen

$$\sum_\nu m_\nu z_\nu^\alpha = C^\alpha; \qquad \sum_\nu m_\nu z_\nu^\alpha z_\nu^\beta = A^{\alpha\beta} \tag{7}$$

auf. Bekanntlich hat man $C^\alpha \equiv 0$, wenn man als Punkt $P(x^\alpha)$ den Schwerpunkt wählt. Läßt man ferner die z^α-Achsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, so hat man überdies:

$$A^{\alpha\beta} = \begin{cases} A^\alpha & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta, \end{cases} \tag{8}$$

wo

$$\begin{cases} A^2 + A^3 = B_1 \\ A^3 + A^1 = B_2 \\ A^1 + A^2 = B_3 \end{cases} \tag{9}$$

die Hauptträgheitsmomente B_α des starren Körpers sind.

§ 3.

Gehen wir jetzt zur relativistischen Mechanik über und denken uns die Welt auf beliebige räumlich-zeitliche Koordinaten $\bar{x}^i$ bezogen, in denen das Linienelement die Form

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ik}\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^k \quad (10)$$ [7])

haben möge. Auch jetzt ist es von Nutzen, einen bestimmten Punkt P unseres materiellen Systems von vornherein zu fixieren. Seine Koordinaten seien x^i und seine Weltlinie C sei durch die Funktionen

$$x^i = x^i(\tau) \quad (11)$$

festgelegt, wo τ ein für den Augenblick willkürlicher Parameter ist, den wir später häufig mit der Eigenzeit σ der Weltlinie C identifizieren werden, die durch

$$d\sigma^2 = (g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k)\cdot d\tau^2 \quad (12)$$

mit

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\tau}$$

gegeben ist.

Von jetzt ab werden wir mit quergestrichenen Buchstaben $\bar{x}^i$, $\bar{g}_{ik}$ Größen bezeichnen, die sich auf allgemeine außerhalb der Weltlinie C gelegene Punkte beziehen; dagegen mit nichtquergestrichenen Buchstaben die analogen für die Punkte von C genommenen Größen. So sind die g_{ik} anzusehen als Funktionen der Koordinaten x^i der Punkte von C.

Wenn wir, für einen Augenblick zur klassischen Kinematik zurückkehrend, uns die Bewegungen der Punkte unseres starren Systems in einem vierdimensionalen Schema dargestellt denken, das aus den kartesischen Koordinaten $\bar{x}^\alpha$ und t gebildet wird, so kann man die Bedingung der Starrheit dadurch ausdrücken daß man sagt: In jedem räumlichen Schnitt $t = \text{konst.}$, der durch einen Punkt der Kurve $x^\alpha(t)$ gelegt ist, gelten die „Bindungen“ (6). Um zur Definition der starren Bewegung in der *relativistischen* Mechanik zu gelangen, gehen wir nun von der Bemerkung aus:

---

[7]) Wir nehmen wie üblich an, daß x^0 die zeitliche Koordinate sei, und daß

$$g_{00} > 0 \quad (10a)$$

gilt. Wenn die andern $\bar{x}$ die raumartigen Koordinaten sind, wird dann

$$\bar{g}_{\alpha\beta}\, d\bar{x}^\alpha\, d\bar{x}^\beta < 0 \quad (10b)$$

gelten müssen, wie man auch die $d\bar{x}^\alpha$ wählt.

Die Hyperflächen, die von allen durch ein und denselben Punkt von C laufenden und zur Kurve orthogonalen[8]) geodätischen Linien gebildet werden, sollen, wenigstens in der unmittelbaren Umgebung von C, eine ganz analoge Bedeutung haben, wie die räumlichen Schnitte $t = \text{konst.}$ Die Starrheit der Bewegung soll ihren Ausdruck finden in Bedingungen, die den Gleichungen (6) sehr ähnlich sind, und die sich auf die genannten Hyperflächen beziehen. Die Rolle der absoluten Zeit wird hier die Eigenzeit σ der Kurve C übernehmen.

§ 4.

Wir wollen mit der Definition derjenigen Bewegung beginnen, die der rein translatorischen Bewegung eines Systems von drei von P auslaufenden orthogonalen Achsen in der klassischen Mechanik entspricht. Wenn wir in einem Punkt der Weltlinie C ein allgemeines Tripel von zur Kurve (und untereinander) senkrechten Richtungen wählen, und wenn wir diese längs der Kurve mittels des gewöhnlichen Parallelismus von Levi-Civita verschieben, so werden diese Richtungen im allgemeinen — wenn C nicht gerade eine geodätische Linie ist — nicht zu C orthogonal bleiben. Dies wird dagegen der Fall sein, wenn wir statt des Parallelismus von Levi-Civita ein anderes Verschiebungsgesetz benutzen, das zum ersten Male von E. Fermi angewandt worden ist. Eine Schar von Vektoren, mit den kontravarianten Komponenten $u^i(\sigma)$, von denen durch jeden Punkt der Weltlinie C einer hindurchgeht, heißt durch die Verschiebung von Fermi auseinander hervorgehend, wenn längs der Kurve C das System von Differentialgleichungen gilt:

$$(13) \qquad du^i + \Gamma^i_{kl}\, u^k\, dx^l = -\left[g_{rt}\, u^r \left(\frac{d^2 x^t}{d\sigma^2} + \Gamma^t_{pq}\, \frac{dx^p}{d\sigma}\, \frac{dx^q}{d\sigma}\right)\right] dx^i,$$

wo die Γ^i_{kl} die Christoffelsymbole zweiter Art sind, genommen für die Punkte von C. Geometrisch kann man den Vektor $u^i + \Delta u^i$, der nach diesem Gesetz aus einem im Punkt P von C gegebenen Vektor u^i durch Verschiebung nach dem Nachbarpunkt $P + dP$ auf C entsteht, durch die folgenden aus (13) leicht abzuleitenden Eigenschaften kennzeichnen:

A) $u^i + \Delta u^i$ bildet in $P + dP$ mit C denselben Winkel wie u^i in P.

B) $u^i + \Delta u^i$ hat dieselbe „Länge“ wie u^i,

C) $u^i + \Delta u^i$ liegt in dem Flächenelement, das in $P + dP$ bestimmt ist durch die Tangente von C und denjenigen Vektor, der aus u^i durch die Verschiebung von Levi-Civita hervorgeht.

---

[8]) „Orthogonal“ ist im Sinne unserer indefiniten Maßbestimmung (12) der raumzeitlichen Welt zu verstehen.

Nun werden wir sagen, daß ein Tripel von Einheitsvektoren u_α^i $[\alpha = 1, 2, 3]$, die zur Weltlinie C und unter sich senkrecht sind, rein translatorisch bewegt wird, wenn es längs C nach dem Gesetz von Fermi

$$(14) \qquad \boxed{du_\alpha^i + \Gamma_{kl}^i u_\alpha^k dx^l = -\left[g_{rt} u_\alpha^r \left(\frac{d^2 x^t}{d\sigma^2} + \Gamma_{pq}^t \frac{dx^p}{d\sigma}\frac{dx^q}{d\sigma}\right)\right] \cdot dx^i}$$

verschoben wird. Für die u_α^i müssen auf Grund von (10a) und (10b) die Orthogonalitätsbedingungen gelten:

$$(15) \qquad g_{ik} u_\alpha^i u_\beta^k = -\delta_{\alpha\beta}; \qquad g_{ik} dx^i u_\alpha^k = 0.$$

Es genügt anzunehmen, daß diese Bedingungen in einem einzigen Augenblick gelten, oder wenn man will in einem Punkt C, um dann aus (14) zu erschließen, daß sie längs der ganzen Kurve gelten [9]).

§ 5.

Wir führen jetzt für unsere geodätischen Hyperflächen ein System von Koordinaten η^α ein, das das im § 1 unter der gleichen Bezeichnung eingeführte in der gewöhnlichen Mechanik benutzte kartesische Koordinatensystem ersetzen soll. Zu diesem Zweck definiert man den Übergang von den ursprünglichen Koordinaten $\bar{x}^i$ zu vier neuen Koordinaten η^α und τ (wo τ der Parameter der Weltlinie C ist) durch die Formeln:

$$(16) \qquad \bar{x}^i = x^i + u_\alpha^i \eta^\alpha - \frac{1}{2} \Gamma_{kl}^i u_\alpha^k u_\beta^l \eta^\alpha \eta^\beta + \ldots .$$

Hier sind die x^i, Γ_{kl}^i und u_α^i längs der Kurve C bestimmte Funktionen, also Funktionen des Parameters τ der Kurve. Die u_α^i sind Hilfsfunktionen, die die Gleichungen (14), (15) befriedigen. Sie ergeben sich als bestimmt bis auf eine ternäre orthogonale Transformation (mit konstanten Koeffizienten), die man auf einen speziellen sonst willkürlichen Punkt von C beziehen kann. Diese selbe Unbestimmtheit überträgt sich auf die Koordinaten η^α. Man sieht leicht, daß die Funktionaldeterminante der $\bar{x}^i$ bezüglich der η^α, τ in der Nachbarschaft der Kurve C von 0 verschieden ist. (16) definiert also eine reguläre Transformation zwischen den $\bar{x}^i$ und den η^α, τ. Das Zeichen $+ \ldots$ des zweiten Gliedes von (16)

[9]) Eine sehr starke physikalische Stütze, die zugunsten unserer Hypothese über die rein translatorische Bewegung in der relativistischen Mechanik spricht, wird durch eine Arbeit von E. Fermi geliefert, die vor wenigen Jahren in den „Rendiconti dei Lincei" [(5) **31** (1922) „Correzione di una grave discrepanza ..."] erschienen ist. Es ist Fermi, von dem unsere Definition der translatorischen Bewegung herrührt, geglückt, sie auf die Bewegung elektrischer Ladungen anzuwenden und dabei einen schweren Widerspruch in dem Ausdruck für die elektromagnetische Masse zu beseitigen, wie er zwischen der Theorie von Abraham und Lorentz und der Relativitätstheorie bestand.

soll andeuten, daß wir noch beliebige Terme hinzufügen können, die in den η^α von höherer als zweiter Ordnung sind. Wir werden jedoch nur eine so kleine Umgebung der Kurve C zu betrachten haben, daß wir Glieder von dritter und höherer Ordnung in den η^α vernachlässigen können.

Im übrigen folgt aus (16):

1. In unseren neuen Koordinaten hat die Kurve C die Gleichungen $\eta^\alpha \equiv 0$.

2. Die Hyperflächen $\tau = \text{konst.}$ sind in der erwähnten Umgebung zweiter Ordnung unserer Weltlinie C identisch mit den aus den zu C orthogonalen geodätischen Linien gebildeten Hyperflächen.

3. Wie man aus den Formeln (16) sehen kann, sind die Koordinaten η^α auf den Hyperflächen $\tau = \text{konst.}$ in der Umgebung ihrer Durchstoßpunkte mit C geodätische Koordinaten im Sinne von Riemann.

4. Die Vektoren u_α^i berühren auf den Hyperflächen $\tau = \text{konst.}$ die von den verschiedenen Punkten von C auslaufenden Koordinatenlinien.

§ 6.

Von den soeben eingeführten Koordinaten η^α gehen wir jetzt zu Koordinaten z^α über. Wir sehen diese an als fest verbunden mit dem starren Körper, der sich in der unmittelbaren Nachbarschaft von C bewegt. Wenn man die für die gewöhnlichen zeitlichen Schnitte $t = \text{konst.}$ geltenden Gleichungen (2) auf die Schnitte $\tau = \text{konst.}$ überträgt, wird man wie im klassischen Fall eine ternäre orthogonale Transformation haben:

$$\eta^\alpha = \xi_\gamma^\alpha z^\gamma, \tag{17}$$

wo die Funktionen ξ_γ^α jetzt als Funktionen von τ anzusehen sind, die von der Rotation des Körpers abhängen, und die zu deuten sind als die Richtungskosinus, welche die Richtungen η^α Augenblick für Augenblick mit den Richtungen z^α bilden. Dabei ist besonders zu bemerken, daß ebenso wie die η^α auch die z^α — soweit sie sich auf Punkte unseres starren Systems beziehen — als so klein anzunehmen sind, daß man in ihnen die Terme von höherer als zweiter Ordnung vernachlässigen kann. Aus (16) und (17) folgt mit einer solchen Annäherung:

$$\bar{x}^i = x^i + u_\alpha^i \xi_\gamma^\alpha z^\gamma - \frac{1}{2} \Gamma_{kl}^i u_\alpha^i u_\beta^k \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta z^\gamma z^\varepsilon. \tag{18}$$

Wenn man ein System von N starr verbundenen materiellen Punkten $\bar{x}_\nu^i$ hat, so gelten für jeden von ihnen die Formeln:

$$\boxed{\bar{x}_\nu^i = x^i + u_\alpha^i \xi_\gamma^\alpha z_\nu^\gamma - \frac{1}{2} \Gamma_{kl}^i u_\alpha^k u_\beta^l \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta z_\nu^\gamma z_\nu^\varepsilon}, \tag{19}$$

wo die von dem Index ν nicht abhängenden Größen für die verschiedenen Punkte des Systems die gleichen sind. Man muß wohl beachten, daß dabei im letzten Term über den Index ν nicht zu summieren ist, obwohl derselbe wiederholt vorkommt. Wenn die Bewegung des Punktsystems $\bar{x}_\nu^i$ starr ist, so sind die z_ν^γ während des Ablaufes der Bewegung Konstante, so daß man sich nur um die Funktionen $x^i(\tau)$ und um die 9 Richtungskosinus $\xi_\beta^\alpha(\tau)$ zu kümmern hat, oder statt letzterer um die drei in ihnen steckenden Eulerschen Parameter $\vartheta^\alpha(\tau)$. Auf Grund der Willkür des Parameters τ der Weltlinie stecken in den $x^i(\tau)$, $\vartheta^\alpha(\tau)$ 6 wesentliche unbekannte Funktionen. Man hat daher, wie es ja sein muß, dieselbe Anzahl von Freiheitsgraden wie im klassischen Fall. Die bis auf eine ternäre Substitution mit konstanten Koeffizienten nach (14), (15) durch die $x^i(\tau)$ festgelegten $u_\alpha^i(\tau)$ hat man als Hilfsfunktionen beizubehalten.

Kapitel III.

Über die Dynamik der starren Körper in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Wir wollen jetzt die Bewegung eines starren Körpers in der relativistischen Mechanik bestimmen, indem wir das Prinzip (9) des Kapitels I anwenden auf den speziellen Fall der Bindungen (19) des Kapitel II, die die Starrheit eines Systems von Punkten $\bar{x}_\nu^i$ definieren. Zu diesem Zweck hat man den Ausdruck Kapitel I (9) für die $\bar{x}_\nu^i$ zu bilden und dann in ihm an Stelle der $\bar{x}_\nu^i$ mittels der Gleichungen Kapitel II (19) die Lagrangeschen Parameter einzuführen, also hier die vier x^i und die drei ϑ^α, die in den ξ_γ^α auftreten.

Hier erhebt sich eine Frage: Die u_α^i sind als Funktion von τ definiert durch die Differentialgleichungen Kapitel II (12), in denen auch die x^i auftreten. Wie hat man diese u_α^i zu behandeln? Etwa als Parameter, die den x^i und den drei Orientierungsparametern ϑ^α als völlig gleichberechtigt an die Seite zu stellen sind? In diesem Falle wären die Gleichungen Kapitel II (12) keine endlichen Gleichungen zwischen den x^i und den u_α^i und es würde sich um anholonome Bindungen handeln, wenn man nicht sogar sagen will um hyperanholonome Bindungen, weil in den Gleichungen die zweiten Ableitungen der x^i vorkommen.

Lassen wir für einen Augenblick die theoretische Sachlage beiseite und bemerken wir zunächst: In einer Annäherung, die bei weitem ausreicht für alle mechanischen Anwendungen, die man etwa im Sinne haben kann, wird sich ergeben, daß die u_α^i aus dem Ausdruck des Variationsprinzips Kapitel I (9) verschwinden, wenn man in ihm die Bindungen Kapitel II (19) einführt. Daher geht für die praktischen Anwendungen

alles so, als wenn wir nur holonome Bindungen mit den Lagrangeschen Parametern x^i und ϑ^α hätten.

Auch in dem theoretisch strengen Fall scheint es nun aber die nächstliegende und sinnvollste Annahme, nur die x^i und die ϑ^α als die Lagrangeschen Parameter zu behandeln, die u_α^i dagegen als reine Hilfsfunktionen, die nicht variiert zu werden brauchen. Das steht auch mit gewissen Untersuchungen der klassischen Mechanik im Einklang, bei denen es sich um Verallgemeinerungen des Hamiltonschen Prinzips Kapitel I (2) handelt, und bei denen in der Hamiltonschen Funktion Größen vorkommen, die man nicht zu variieren hat, wenn man mit der Erfahrung im Einklang bleiben will. Man braucht dabei nur z. B. an den Fall eines nicht konservativen Kräftefeldes zu denken, in dem die Komponenten F_α $[\alpha = 1, 2, 3]$ der Resultierenden der wirkenden Kräfte Funktionen

$$F_\alpha\left(x^1, x^2, x^3, \frac{dx^1}{dt}, \ldots, \frac{d^2x^1}{dt^2}, \ldots\right)$$

nicht nur der Koordinaten x^α, sondern auch der Geschwindigkeiten, Beschleunigungen usw. sein dürfen. Haben wir dann z. B. einen einzigen materiellen Punkt mit den Koordinaten x^α und sind y^α die Koordinaten eines beliebigen festen Aufpunktes, so haben wir das „Virial“ [10]) der eingeprägten Kraft zu bilden:

$$\mathfrak{V} = \sum_{\alpha=1}^{3} F_\alpha (x^\alpha - y^\alpha)$$

und das Variationsprinzip anzusetzen:

$$\delta \int (T + \mathfrak{V})\, dt \qquad \left[T = \frac{m}{2} v^2\right]. \tag{1}$$

In diesem sind nun die F_α Funktionen, die man überhaupt nicht variieren darf, die also eine analoge Rolle spielen wie in dem uns beschäftigenden Fall die u_α^i. In der Tat erhält man aus (1) unter dieser Voraussetzung und nur unter dieser zunächst

$$\int \left(\delta T + \sum_{\alpha=1}^{3} F_\alpha \delta x^\alpha\right) dt$$

und daraus dann die mechanischen Grundgleichungen $m \cdot \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = F^\alpha$.

§ 2.

Unter der angedeuteten Festsetzung über die u_α^i wollen wir jetzt die Bewegungsgleichungen für den starren Körper ableiten.

---

[10]) Vgl. z. B. Kirchhoff, Mechanik, „Dritte Vorlesung“, § 3, oder Levi-Civita e Amaldi, Lezioni di meccanica razionale II_2, p. 435.

Der größeren Verständlichkeit halber wollen wir uns noch einmal die ganze Sachlage vor Augen führen. Wir denken uns in der Welt allgemeine krummlinige Koordinaten $\bar{x}^i$ eingeführt und nehmen das Gravitationsfeld als gegeben an. Es sind also die $\bar{g}_{ik}$ als von vornherein gegebene Funktionen der $\bar{x}^i$ anzusehen, und das gleiche gilt dann auch von den aus den $\bar{g}_{ik}$ abgeleiteten Christoffelsymbolen $\bar{\Gamma}^i_{kl}$ sowie von den Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors, den wir später benutzen und wie üblich mit $\bar{R}_{iklm}$ bezeichnen werden. Weiter nehmen wir nun eine Kurve $x^i(\tau)$ an. Die Koordinaten ihrer Punkte zeichnen wir dadurch aus, daß wir bei ihnen den Querstrich weglassen. Mit g_{ik}, Γ^i_{kl}, R_{iklm} bezeichnen wir dann die für die Punkte der Kurve $x^i(\tau)$ genommenen Größen $\bar{g}_{ik}$, $\bar{\Gamma}^i_{kl}$ und $\bar{R}_{iklm}$. Die g_{ik}, Γ^i_{kl}, R_{iklm} sind also zunächst Funktionen der vier Argumente x^i, und wenn die Kurve $x^i(\tau)$ dann irgendwie festgelegt ist, Funktionen von τ. Nun nehmen wir in der Umgebung der Weltlinie $x^i(\tau)$ ein Bündel von Weltlinien $\bar{x}^i_\nu(\tau)$ an, die zu $x^i(\tau)$ so benachbart sind, daß man in den Koordinatendifferenzen $\bar{x}^i_\nu(\tau) - x^i(\tau)$ bereits die Glieder dritter Ordnung vernachlässigen kann.

Ist die Bewegung starr, so lassen sich die Funktionen $\bar{x}^i_\nu(\tau)$, mögen ihrer auch noch so viele sein, alle durch die vier Funktionen $x^i(\tau)$ und durch die weiteren Funktionen $\xi^\alpha_\nu(\tau)$ und $u^i_\alpha(\tau)$ nach der Formel Kapitel II (19):

$$\bar{x}^i_\nu = x^i + u^i_\alpha \xi^\alpha_\gamma z^\gamma_\nu - \frac{1}{2}\Gamma^i_{kl} u^k_\alpha u^l_\beta \xi^\alpha_\gamma \xi^\beta_\varepsilon z^\gamma_\nu z^\varepsilon_\nu \tag{2}$$

ausdrücken. Dabei sind die z^γ_ν für die Weltlinie eines jeden Punktes $\bar{x}^i_\nu$ neue Konstanten, die die Lage desselben im starren Körper festlegen, und zwar sind auch die z^γ_ν so klein, daß man in ihnen wie in den $\bar{x}^i_\nu - x^i$ bereits Glieder dritter Ordnung vernachlässigen kann. Die $x^i(\tau)$, $\xi^\alpha_\gamma(\tau)$, $u^i_\alpha(\tau)$ sind aber für alle Punkte $\bar{x}^i_\nu$ dieselben Funktionen, die noch an die Relationen gebunden sind [vgl. Kapitel II (3), (14), (15)]:

$$\delta_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha_\gamma\,\xi^\beta_\varepsilon = \delta_{\gamma\varepsilon}, \tag{3}$$

$$\dot{u}^i_\alpha + \Gamma^i_{kl} u^k_\alpha \dot{x}^l = -\left[g_{rt} u^r_\alpha \left(\frac{d^2 x^t}{d\sigma^2} + \Gamma^t_{pq}\frac{dx^p}{d\sigma}\frac{dx^q}{d\sigma}\right)\right]\dot{x}^i, \tag{4}$$

$$g_{ik} u^i_\alpha u^k_\beta = -\delta_{\alpha\beta}; \qquad g_{ik}\dot{x}^i u^k_\alpha = 0. \tag{5}$$

Wir wenden nun auf die Punkte $\bar{x}^i_\nu$ das dynamische Prinzip unseres Kapitels I (9) an, das jetzt lautet:

$$\delta \int \sum_\nu m_\nu\, d\bar{s}_\nu = 0 \tag{6}$$

mit

$$d\bar{s}^2_\nu = g_{ik}(\bar{x}_\nu)\,\dot{\bar{x}}^i_\nu\,\dot{\bar{x}}^k_\nu\, d\tau^2, \tag{7}$$

wo hier, wie im folgenden immer, bei dem einzigen Index ν *nicht* zu summieren ist, wenn kein Summenzeichen geschrieben ist. Bei jedem der $d\bar{s}_\nu$ sind hier als Argumente der $\bar{g}_{ik}$ die Koordinaten $\bar{x}^i_\nu$ des ν-ten Punktes zu nehmen, so daß wir unter dem Integral in (6) einen Ausdruck

$$\left[\sum_\nu m_\nu \frac{d\bar{s}_\nu}{d\tau}\right] d\tau$$

haben, wo

$$\sum_\nu m_\nu \frac{d\bar{s}_\nu}{d\tau}$$

von den Funktionen $\bar{x}^i_\nu(\tau)$ und ihren Ableitungen $\dot{\bar{x}}^i_\nu(\tau)$ abhängt. In diesem Ausdruck haben wir nun nach (2) für die $\bar{x}^i_\nu$ und $\dot{\bar{x}}^i_\nu$ die x^i, ξ^α_γ und u^i_α und ihre Ableitungen einzuführen. Da wir nach (4) die Ableitungen der u^i_α eliminieren können, bekommen wir, von den Konstanten m_ν und $z_\nu{}^\alpha$ abgesehen, eine Gleichung der Form

$$\delta \int L(x^i, \dot{x}^i, \xi^\alpha_\gamma, \dot{\xi}^\alpha_\gamma, u^i_\alpha)\, d\tau = 0. \tag{8}$$

Diese Gleichung (8) haben wir nun als Variationsproblem für die Funktionen $x^i(\tau)$ und die drei in den ξ^α_γ enthaltenen unabhängigen Funktionen ϑ^α aufzufassen, die Hilfsfunktionen u^i_α haben wir nach §1 nicht zu variieren. Wir können das Variationsproblem auch auffassen als ein solches für die Funktionen x^i und die 9 Funktionen ξ^α_γ mit den Nebenbedingungen (3). Nach den Regeln der Variationsrechnung hat man dann die Funktion

$$F = L + \mu^{\gamma\varepsilon}(\delta_{\alpha\beta}\xi^\alpha_\gamma \xi^\beta_\varepsilon - \delta_{\gamma\varepsilon}) \tag{9}$$

mit den Lagrangeschen Multiplikatoren $\mu^{\gamma\varepsilon}$ zu bilden, die wir dabei als der Symmetriebedingung

$$\mu^{\gamma\varepsilon} = \mu^{\varepsilon\gamma}$$

genügend voraussetzen (die somit also 6 verschiedene Größen sind). Die Gleichungen von Euler-Lagrange sind dann:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{dF}{\partial \dot{\xi}^\alpha_\gamma} - \frac{\partial F}{\partial \xi^\alpha_\gamma} = 0. \tag{11}$$

Die 6 Größen $\mu^{\gamma\varepsilon}$ kommen dabei nur in den letzten Gliedern der linken Seiten von (11) vor. Aus den 9 Gleichungen (11) kann man, wie leicht nachzurechnen, die 6 Größen $\mu^{\gamma\varepsilon}$ eliminieren und wird dabei auf das Gleichungssystem (13) geführt, das wegen der schiefen Symmetrie der Indizes α und β nur aus drei wesentlichen Gleichungen besteht. Da im letzten Glied von (9) die x^i und $\dot{x}^i$ gar nicht vorkommen, kann man in

(10) statt F auch wieder L schreiben. Man hat also schließlich das Gleichungssystem

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \tag{12}$$

$$\sum_{\varepsilon,\gamma=1}^{3} (\delta_{\alpha\varepsilon}\xi_\beta^\gamma - \delta_{\beta\varepsilon}\xi_\alpha^\gamma)\left[\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\varepsilon^\gamma} - \frac{\partial L}{\partial \xi_\varepsilon^\gamma}\right] = 0. \tag{13}$$

Wir gehen nun daran, erstens die Hamiltonsche Funktion L unseres Variationsproblems (8) zu berechnen, und dann die aus ihr resultierenden Bewegungsgleichungen (12), (13).

§ 3.

Die Rechnung können wir nun durch einen Satz von E. Fermi [11]) sehr vereinfachen, der besagt, daß man in jedem Riemannschen Raum zu einer gegebenen Kurve immer solche Koordinaten einführen kann, daß die Ableitungen der $\bar{g}_{ik}$ längs der Kurve verschwinden.

Denken wir uns unsere Koordinaten $\bar{x}^i$ von vornherein schon als Fermische Koordinaten für die Kurve $x^i(\tau)$ gewählt, so sind für uns die $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}$ und damit nach der Definition der Christoffelsymbole auch die $\Gamma_{kl}^i = 0$. Die g_{ik} und auch die höheren Ableitungen $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^r \partial x^s}$ usw. längs der Kurve werden dabei natürlich im allgemeinen von 0 verschieden sein. Wir wollen nun so vorgehen, daß wir unsere Rechnung zuerst für Fermische Koordinaten durchführen und die Formeln, die wir zuletzt erhalten, dann wieder invariant schreiben.

Bei der Wahl der Fermischen Koordinaten vereinfacht sich die Gleichung (4) zu

$$\dot{u}_\alpha^i = -T_\alpha \dot{x}^i \quad \text{mit} \quad T_\alpha = g_{rt} u_\alpha^r \frac{d^2 x^t}{d\sigma^2}. \tag{14}$$

Wir bilden uns nun zuerst durch Differenzieren von (2) die $\dot{\bar{x}}_\nu^i$; dabei müssen wir aber beachten, daß wir in (2) nicht gleich von Anfang an die $\Gamma_{kl}^i = 0$ setzen dürfen, sondern erst am Schluß. Denn andernfalls würden wir ein Glied mit den Ableitungen der Γ_{kl}^i verlieren, diese Größen verschwinden ja aber nicht. Wir erhalten nun unter Berücksichtigung von (14):

$$\dot{\bar{x}}_\nu^i = \dot{x}^i - \dot{x}^i \cdot T_\alpha \xi_\gamma^\alpha z_\nu^\gamma + u_\alpha^i \dot{\xi}_\gamma^\alpha z_\nu^\gamma - \frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^r} \dot{x}^r u_\alpha^k u_\beta^l \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta z_\nu^\gamma z_\nu^\varepsilon. \tag{14a}$$

Um (6) zu bilden, haben wir uns nun noch die $\bar{g}_{ik}$ in den der Kurve

[11]) Siehe etwa Levi-Civita, „Sur l'écart géodésique", Math. Ann. 97 (1928), p. 291–320.

$x^i(\tau)$ benachbarten Punkten $\bar{x}_\nu^i$ zu berechnen. Wir entwickeln die $\bar{g}_{ik}$ in der Nachbarschaft der Kurve $x^i(\tau)$ nach Potenzen von $\bar{x}_\nu^i - x^i$:

$$\bar{g}_{ik}(\bar{x}_\nu) = g_{ik} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}(\bar{x}_\nu^r - x^r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^r \partial x^s}(\bar{x}_\nu^r - x^r)(\bar{x}_\nu^s - x^s), \tag{15}$$

wobei wir Glieder dritter Ordnung in $\bar{x}_\nu^i - x^i$ wieder vernachlässigen. Für Fermische Koordinaten muß auch das mittlere Glied auf der rechten Seite von (15) verschwinden. Somit erhalten wir, wenn wir in (15) die $\bar{x}_\nu^i - x^i$ nach (2) ersetzen und Glieder dritter Ordnung in den z_ν^α vernachlässigen:

$$\bar{g}_{ik}(\bar{x}_\nu) = g_{ik} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^r \partial x^s} u_\alpha^r u_\beta^s \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta z_\nu^\gamma z_\nu^\varepsilon. \tag{16}$$

Aus (14a) und (15) ergibt sich nun bis zu Gliedern zweiter Ordnung in den z_ν^α unter Berücksichtigung von (5):

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\bar{s}_\nu}{d\tau}\right)^2 = \bar{g}_{ik}(\bar{x}_\nu)\dot{\bar{x}}_\nu^i \dot{\bar{x}}_\nu^k &= g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k - 2g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k T_\alpha \xi_\gamma^\alpha z_\nu^\gamma - \delta_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\gamma^\alpha \dot{\xi}_\varepsilon^\beta z_\nu^\gamma z_\nu^\varepsilon \\ &+ g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k \cdot T_\alpha T_\beta \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta z_\nu^\gamma z_\nu^\varepsilon - g_{it}\frac{\partial \Gamma_{rl}^t}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^k u_\alpha^r u_\beta^l \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta z_\nu^\gamma z_\nu^\varepsilon \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^r \partial x^l} u_\alpha^r u_\beta^l \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta z_\nu^\gamma z_\nu^\varepsilon \dot{x}^i \dot{x}^k.\end{aligned} \tag{17}$$

Aus der Definition des Riemannschen Krümmungstensors beweist man nun leicht die für Fermische Koordinaten gültige Identität:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^r \partial x^l} - g_{it}\frac{\partial \Gamma_{rl}^t}{\partial x^k} = R_{rikl}. \tag{18}$$

Faßt man in (17) jetzt die beiden letzten Glieder zusammen und nehmen wir die T_α jetzt in der invarianten in (4) auftretenden Form

$$T_\alpha = g_{rt} u_\alpha^r \left(\frac{d^2 x^t}{d\sigma^2} + \Gamma_{pq}^t \frac{dx^p}{d\sigma}\frac{dx^q}{d\sigma}\right),$$

so haben wir die Gleichung (17) jetzt in der invarianten Schreibweise:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\bar{s}_\nu}{d\tau}\right)^2 &= g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k - 2g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k T_\alpha \xi_\gamma^\alpha z_\nu^\gamma - \delta_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\gamma^\alpha \dot{\xi}_\varepsilon^\beta z_\nu^\gamma z_\nu^\varepsilon \\ &+ g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k T_\alpha T_\beta \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta z_\nu^\gamma z_\nu^\varepsilon + R_{rikl}\dot{x}^i\dot{x}^k u_\alpha^r u_\beta^l \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta z_\nu^\gamma z_\nu^\varepsilon.\end{aligned} \tag{19}$$

Da aus einer Gleichung, die in den kleinen Größen z^α die Form hat:

$$S^2 = A + B_\alpha z^\alpha + C_{\beta\gamma} z^\beta z^\gamma + \dots$$

bei Vernachlässigung der Glieder dritter Ordnung folgt:

$$S = \sqrt{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}} B_\alpha z^\alpha + \frac{1}{8A\sqrt{A}}[4AC_{\beta\gamma} z^\beta z^\gamma - B_\beta B_\gamma z^\beta z^\gamma] + \dots,$$

so erhalten wir aus (19), wenn wir durch

$$d\sigma^2 = g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k d\tau^2 \tag{20}$$

noch das Element der Eigenzeit der Weltlinie $x^i(\tau)$ einführen:

$$\frac{d\bar{s}_\nu}{d\tau} = \frac{d\sigma}{d\tau} - \frac{d\sigma}{d\tau} T_\alpha \xi_\gamma^\alpha z_\nu^\gamma$$
$$(21) \qquad - \frac{1}{2}\frac{d\tau}{d\sigma}\left[\delta_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\gamma^\alpha \dot{\xi}_\varepsilon^\beta z_\nu^\gamma z_\nu^\varepsilon - R_{iiks}\dot{x}^i \dot{x}^k u_\alpha^l u_\beta^s \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta z_\nu^\gamma z_\nu^\varepsilon\right]$$

und nach (6) und (8), wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$(22) \qquad M = \sum_\nu m_\nu; \qquad C^\alpha = \sum_\nu m_\nu z_\nu^\alpha; \qquad A^{\alpha\beta} = \sum_\nu m_\nu z_\nu^\alpha z_\nu^\beta:$$

$$(23) \qquad S = T_\alpha \xi_\gamma^\alpha C^\gamma = g_{rt} u_\alpha^r \xi_\gamma^\alpha C^\gamma \left[\frac{d^2 x^t}{d\sigma^2} + \Gamma_{pq}^t \frac{dx^p}{d\sigma}\frac{dx^q}{d\sigma}\right]$$

die endgültige Form:

$$(24) \quad L = \frac{d\sigma}{d\tau}(M - S) - \frac{1}{2}\frac{d\tau}{d\sigma}\left[\delta_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\gamma^\alpha \dot{\xi}_\varepsilon^\beta A^{\gamma\varepsilon} - R_{iiks}\dot{x}^i \dot{x}^k u_\alpha^l u_\beta^s \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta A^{\gamma\varepsilon}\right].$$

Dabei sind die M, C^α und $A^{\gamma\varepsilon}$ Größen, die nur von der Gestalt des starren Körpers abhängen. M ist die Gesamtmasse und die C^α und $A^{\gamma\varepsilon}$ sind die bereits im klassischen Fall eingeführten Größen Kapitel II (7). Im übrigen treten in dem Ausdruck für L nur die Funktionen $x^i(\tau)$; $\xi_\gamma^\alpha(\tau)$; $u_\alpha^i(\tau)$ resp. deren Ableitungen auf, denn die R_{iiks} und die g_{ik}, Γ_{kl}^i in (23) sind Ausdrücke in den x^i und ebenso ist $d\sigma : d\tau$ ein Ausdruck, der nach (20) von den x^i und den $\dot{x}^i$ abhängt.

Für das Folgende wollen wir nun die Annahme machen, daß $x^i(\tau)$ die Weltlinie des *Schwerpunktes* des starren Körpers darstellt. Dann haben wir, wie im Kapitel II § 3 schon erwähnt, $C^\alpha \equiv 0$ und somit wird in (24) $S = 0$. Drücken wir $d\sigma : d\tau$ wieder nach (20) durch die x^i, $\dot{x}^i$ aus so haben wir dann

$$(25) \qquad \boxed{\begin{aligned} L = \frac{1}{\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i \dot{x}^k}}\Big\{ & M(g_{ik}\dot{x}^i \dot{x}^k) - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\gamma^\alpha \dot{\xi}_\delta^\beta A^{\gamma\delta} \\ & + \frac{1}{2} R_{iiks}\dot{x}^i \dot{x}^k u_\alpha^l u_\beta^s \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta A^{\gamma\varepsilon}\Big\} \end{aligned}}.$$

§ 4.

Für die Funktion (25) müssen wir jetzt die Bewegungsgleichungen (12), (13) bilden. Vorher wollen wir die Gleichungen (13) und (25) aber in eine etwas andere Form bringen, die für die mechanische Interpretation vorteilhafter ist. Wir wollen in unseren Formeln, wie dies in den klassischen Gleichungen von Euler geschieht, die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit unseres Körpers sichtbar machen (das heißt der Winkelgeschwindigkeit des körperfesten Dreibeins der z^α-Achsen bezüglich des Hilfssystems der η^α-Achsen mit den raumfesten Achsenrichtungen). Zu

diesem Zweck geht man gewöhnlich von den „Orthogonalitätsbedingungen“ (3) aus und leitet aus ihnen durch Ableitung her:

$$\delta_{\alpha\beta}\frac{d\xi_\gamma^\alpha}{d\tau}\xi_\varepsilon^\beta+\delta_{\alpha\beta}\xi_\gamma^\alpha\frac{d\xi_\varepsilon^\beta}{d\tau}=0. \tag{26}$$

Wenn wir

$$\delta_{\alpha\beta}\frac{d\xi_\gamma^\alpha}{d\tau}\xi_\varepsilon^\beta=q_{\gamma\varepsilon} \tag{27}$$

setzen, so gelten für die $q_{\gamma\varepsilon}$ die Bedingungen der schiefen Symmetrie:

$$q_{\gamma\varepsilon}+q_{\varepsilon\gamma}=0, \tag{28}$$

wie sich aus (26) ergibt. Die Gleichungen (27) kann man nach den $\frac{d\xi_\gamma^\alpha}{d\tau}$ auflösen und man erhält mittels (3):

$$\dot{\xi}_\gamma^\alpha=\sum_{\lambda,\varepsilon=1}^{3}\delta_{\lambda\varepsilon}\xi_\lambda^\alpha q_{\gamma\varepsilon}, \tag{29}$$

so daß die neun $\dot{\xi}_\gamma^\alpha$ sich durch die drei $q_{\gamma\varepsilon}$ und die ξ_λ^α ausdrücken lassen (Formeln von Poisson).

Setzen wir weiter:

$$\left\{\begin{aligned} q_{23}&=-q_{32}=\omega_1\\ q_{31}&=-q_{13}=\omega_2,\\ q_{12}&=-q_{21}=\omega_3 \end{aligned}\right. \tag{30}$$

so entsprechen die ω_α genau den drei Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers, die man in der klassischen Mechanik einzuführen pflegt. Man muß dabei besonders beachten, daß diese Winkelgeschwindigkeit im allgemeinen auf den Parameter τ bezogen ist statt auf die absolute Zeit t. Natürlich können wir speziell unseren Parameter τ längs der Weltlinie C auch mit der Newtonschen Zeit t zusammenfallen lassen. Das werden wir in den Näherungsrechnungen, die wir im Kapitel IV für die astronomischen Anwendungen anstellen werden, auch wirklich tun. Hier wollen wir daher schon betonen, daß die Größen $q_{\gamma\varepsilon}$ und ω_α auf Grund von (27) von der Wahl des Parameters τ abhängen. Wir werden durch das Zeichen $\sim$ die q resp. die ω kennzeichnen, die sich auf einen mit der absoluten Zeit t zusammenfallenden Parameter τ beziehen, indem wir setzen:

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{q}_{\gamma\varepsilon}&=\delta_{\alpha\beta}\frac{d\xi_\gamma^\alpha}{dt}\xi_\varepsilon^\beta,\\ \tilde{\omega}_1&=\tilde{q}_{23};\ \tilde{\omega}_2=\dots, \end{aligned}\right. \tag{31}$$

während wir für einen mit der Eigenzeit σ von C zusammenfallenden Parameter τ das Symbol $\frown$ verwenden werden und schreiben:

$$(32)\qquad \begin{cases} \hat{q}_{\gamma\varepsilon} = \delta_{\alpha\beta}\dfrac{d\xi_\gamma^\alpha}{d\sigma}\,\xi_\varepsilon^\beta \\ \hat{\omega}_1 = \hat{q}_{23} \cdots . \end{cases}$$

Darnach sind die für einen allgemeinen Parameter τ genommenen ω_α mit den $\tilde{\omega}_\alpha$, $\hat{\omega}_\alpha$ durch die Gleichungen

$$(33)\qquad \omega_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha \frac{dt}{d\tau} = \hat{\omega}_\alpha \frac{d\sigma}{d\tau}$$

verbunden.

Kehren wir zu unserem Ausdruck (25) zurück! Wir wollen jetzt in der Funktion L die $\dot{\xi}_\gamma^\alpha$ nach (29) und (30) durch die ω_α und die ξ_γ^α selbst ausdrücken. Wenn wir die neue Funktion, die wir so erhalten mit dem Buchstaben $\mathfrak{L}$ bezeichnen, so haben wir:

$$(34)\qquad L(\dot{\xi}_\gamma^\alpha, \xi_\gamma^\alpha) = \mathfrak{L}(\omega_\alpha, \xi_\delta^\alpha).$$

Wir haben nun auch die Bewegungsgleichungen (13) auf die ω_α umzuschreiben. Aus (29) errechnet man leicht, daß die Gleichungen (13) für unsere neue Funktion $\mathfrak{L}$ und die ω_α statt der $\dot{\xi}_\gamma^\alpha$ die Form annehmen:

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \omega_1} = \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \omega_2}\omega_3 - \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \omega_3}\omega_2 + \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi_2^\alpha}\xi_3^\alpha - \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi_3^\alpha}\xi_2^\alpha\right) \\ \text{und zwei analoge Gleichungen, die aus dieser durch zyklische} \\ \text{Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 hervorgehen.} \end{cases}$$

Um unsere Formeln möglichst einfach zu gestalten, wollen wir jetzt noch die körperfesten Achsen mit den *Hauptträgheitsachsen* des Körpers zusammenfallen lassen, so daß die Gleichungen (8) des Kapitels II gelten. Unter dieser Voraussetzung gilt für das eine in (25) auftretende Glied:

$$(36)\qquad \delta_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\gamma^\alpha \dot{\xi}_\varepsilon^\beta A^{\gamma\varepsilon} = \sum_\alpha B_\alpha \omega_\alpha^2$$

und die neue Funktion $\mathfrak{L}$ nimmt die Form an:

$$(37)\qquad \boxed{\begin{aligned} \mathfrak{L} = \frac{1}{\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}}\Big\{ & M(g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k) - \frac{1}{2}\sum_\alpha B_\alpha \omega_\alpha^2 \\ & + \frac{1}{2} R_{liks}\dot{x}^i\dot{x}^k u_\alpha^l u_\beta^s \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta A^{\gamma\varepsilon}\Big\} \end{aligned}}.$$

Für diese Funktion stellen jetzt die Gleichungen (35) und (12):

$$(38)\qquad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^i} = 0,$$

die natürlich für die Funktion $\mathfrak{L}$ ebenso gelten, wie für die Funktion L, das vollständige System der Bewegungsgleichungen dar.

§ 5.

Die Berechnung der Bewegungsgleichungen (35), (38) aus der Hamiltonschen Funktion (37) wollen wir hier nicht explizite anführen. Wir bemerken nur, daß die Rechnung sich sehr vereinfacht, wenn man wieder längs C Fermische Koordinaten einführt und dann nachträglich die erhaltenen Formeln invariant schreibt. Zum Schluß können wir nachträglich zur Vereinfachung der Formeln die Eigenzeit σ von C als Parameter einführen.

Verwenden wir die Abkürzungen

$$\mathring{x}^i = \frac{dx^i}{d\sigma}; \qquad D^2 x^i = \frac{d^2 x^i}{d\sigma^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{d\sigma} \frac{dx^l}{d\sigma}, \tag{39}$$

und bezeichnen wir mit R_{likst} die kovarianten Ableitungen des Riemannschen Krümmungstensors R_{likst}, so erhalten wir aus (35) und (38) die beiden Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned} & D^2 x^k [g_{ik}(2M + \sum_\alpha B_\alpha \hat{\omega}_\alpha^2) + u_\alpha^l u_\beta^s \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta A^{\gamma\varepsilon}(R_{likst} + R_{lkis} \\ & \quad - R_{lkts}\mathring{x}^t \mathring{x}_i - R_{ltks}\mathring{x}^t \mathring{x}_i - R_{lpqs}\mathring{x}^p \mathring{x}^q g_{ik} - 2R_{tips}\mathring{x}^p \mathring{x}^t g_{lk})] \\ & \quad + u_\alpha^l u_\beta^s \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta A^{\gamma\varepsilon}[R_{lkis,t} + R_{likst,t} - R_{lkps,t}\mathring{x}^p \mathring{x}_i]\mathring{x}^k \mathring{x}^t \\ & \quad + 2u_\alpha^l u_\beta^s [(R_{lpks} + R_{spkl})\mathring{x}^p \mathring{x}^k \mathring{x}_i - (R_{likst} + R_{lkis})\mathring{x}^k] \\ & \cdot \{\hat{\omega}_1 \xi_2^\alpha \xi_3^\beta (B_2 - B_3) + \hat{\omega}_2 \xi_3^\alpha \xi_1^\beta (B_3 - B_1) + \hat{\omega}_3 \xi_1^\alpha \xi_2^\beta (B_1 - B_2)\} \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} & B_1 \frac{d\hat{\omega}_1}{d\sigma} - (B_2 - B_3)\hat{\omega}_2 \hat{\omega}_3 \\ & + \frac{1}{2}(R_{likst} + R_{sikl})\mathring{x}^i \mathring{x}^k u_\alpha^l u_\beta^s \xi_2^\alpha \xi_3^\beta (B_2 - B_3) \end{aligned} \tag{41}$$

und zwei analoge Gleichungen, die sich aus dieser durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 ergeben.

§ 6.

Aus (40) folgt, daß im allgemeinen Fall die Weltlinie C $[x^i(\tau)]$ des Schwerpunktes nicht im strengen Sinn eine geodätische Linie ist, weil nicht die Gleichung $D^2 x^i \equiv 0$ gilt. Natürlich ist die Weltlinie C von einer geodätischen Linie nur wenig verschieden. Denn die $A^{\gamma\varepsilon}$, B_α sind Größen, die von den kleinen Abständen z^α in Termen zweiter Ordnung abhängen. In den z^α haben wir aber schon Terme dritter Ordnung vernachlässigt. Es werden also auch die $A^{\gamma\varepsilon}$, B_α schon ziemlich kleine Größen sein. Daher überwiegt in (40) der erste Term $D^2 x^k g_{ik} \cdot 2M$ als der einzige, der die $A^{\gamma\varepsilon}$, B_α nicht enthält, alle anderen.

Weil in (40) die ω_α, ξ_γ^α auftreten und in (41) die x^i, $\hat{x}^i$, kann man in der relativistischen Theorie des starren Körpers nicht mehr, wie in der klassischen, durch das eine Gleichungssystem (40) die Bewegung des Schwerpunktes getrennt für sich bestimmen, und durch das andere (41) dann etwa ebenso die Rotationsbewegung um den Schwerpunkt getrennt für sich.

In speziellen Fällen können die Verhältnisse natürlich wesentlich einfacher liegen.

Haben wir z. B. einen leeren Raum, also die spezielle Relativitätstheorie, so ist der Riemannsche Tensor Null und aus (40) folgt wegen $2M + \sum B_\alpha \hat{\omega}_\alpha^2 > 0$: $D^2 x^i = 0$, die Weltlinie des Schwerpunktes ist also eine geodätische Linie.

Die Gleichungen (41) werden in diesem Fall rein formal den bekannten Eulerschen Kreiselgleichungen der klassischen Mechanik

$$B_1 \frac{d\hat{\omega}_1}{d\sigma} = (B_2 - B_3)\,\hat{\omega}_2\,\hat{\omega}_3 \quad \text{usw.} \tag{42}$$

ganz gleich. Man muß aber beachten, daß hier statt der absoluten Zeit t die Eigenzeit σ auftritt.

§ 7.

Betrachten wir speziell in unserm Gravitationsfeld die Bewegung eines Körpers von sphärischer Struktur, d. h. eines Körpers, für den gilt:

$$\begin{cases} B_1 = B_2 = B_3 = B, \\ A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} B \cdot \delta_{\alpha\beta}, \end{cases} \tag{43}$$

so folgt aus (41)

$$\frac{d\,\hat{\omega}_\alpha}{d\sigma} = 0 \qquad [\alpha = 1, 2, 3] \tag{44}$$

oder

$$\hat{\omega}_\alpha = \text{konst.} \tag{45}$$

Aus (33) folgt dann aber, daß $\hat{\omega}_\alpha$ proportional zu $\tilde{\omega}_\alpha$ ist, wo $\tilde{\omega}_\alpha$ der gewöhnliche Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist. Daher ist auch die Richtung dieses Vektors konstant, so daß man sagen kann: Die momentane Rotationsachse des starren Körpers bewegt sich längs C rein translatorisch im Sinne des Kapitels II § 5, sie verschiebt sich also längs C nach dem Gesetz von Fermi. Die Winkelgeschwindigkeit hat auch konstante Größe, wenn sie auf die Eigenzeit von C bezogen ist, im allgemeinen aber nicht, wenn sie nach einem andern Zeitparameter gemessen wird. Die Weltlinie C ist auch im Fall eines Körpers von sphärischer Struktur im allgemeinen nicht im strengen Sinne eine geodätische.

Kapitel IV.

Die Theorie der Erdrotation in der relativistischen Mechanik.

§ 1.

Wir wollen jetzt unsere allgemeinen Formeln (37), (40), (41) unter Verwendung gewisser vereinfachender Näherungen auf die Rotationsbewegung der Erde anwenden.

Wir müssen hauptsächlich das zweite System (41) der Bewegungsgleichungen betrachten.

Wenn wir die Erde als ein homogenes Rotationsellipsoid annehmen, so können wir setzen $B_2 = B_3 = B$ und

$$B_1 = B(1+\varkappa), \tag{1}$$

wobei man aus den empirischen Dimensionen der Erde ermittelt, daß $\varkappa = \frac{B_1 - B}{B}$ die Größenordnung von $\varkappa \sim {}^1/_{300}$ hat.

Auf Grund der sehr geringen Größe der Abplattung $\varkappa$ können wir die Erde in erster Annäherung als einen Körper sphärischer Struktur ansehen. In diesem Falle folgt, wie wir aus Kapitel III § 7 wissen, aus (41), daß $\hat{\omega}_\alpha =$ konst. ist, und daß die momentane Rotationsachse längs der Weltlinie C nach dem Gesetz von Fermi verschoben wird. Diese Tatsache führt auf die sogenannte relativistische Präzession der Erde, die zum erstenmal durch A. D. Fokker[12]) und I. A. Schouten[13]) berechnet worden ist. Wenn wir annehmen, daß die Welt statisch ist, und wenn wir sie in Raum und Zeit spalten, wenn wir ferner die Weltlinie des Schwerpunktes der Erde als räumlich [nicht raumzeitlich!] geschlossen annehmen, so wird die Erdachse bei Verschiebung nach dem Gesetz von Fermi nach einem räumlichen Umlauf nicht in dieselbe räumliche Anfangslage zurückkehren, sondern eine gewisse Richtungsänderung aufweisen. Diese hat Fokker berechnet und dabei folgende Voraussetzungen gemacht:

a) Er nimmt die Welt mit einem Linienelement von der Schwarzschildschen Form an. Er berücksichtigt also ausschließlich die Gravitationswirkung der Sonne (und nicht etwa die des Mondes[14]), die ja nach der klassischen Theorie an der Präzessionsbewegung der Erde mit einem doppelt so großen Betrage beteiligt ist wie die Sonne).

---

[12]) „The geodesic precession", Koninklijke Akademie von Wetenschappen te Amsterdam **23** (1920), Nr. 5.

[13]) „On geodesic precession", Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam 1921, Nr. 3.

[14]) Siehe etwa: Levi-Civita-Amaldi, Lezioni di meccanica razionale (Bologna, Zanichelli), Bd. I, S. 496 ff., Bd. II_2, S. 391—412.

b) Er nimmt die Weltlinie des Schwerpunktes der Erde als eine geodätische Linie der Welt an, und zwar speziell als eine solche, die bei der Spaltung in Raum und Zeit einer gleichförmigen Bewegung um die Sonne entspricht.

c) Weil nach b) die Weltlinie des Schwerpunktes eine geodätische ist, fällt die Verschiebung von Fermi mit der gewöhnlichen Parallelverschiebung von Levi-Civita zusammen. Fokker nimmt nun ohne weitergehende dynamische Rechtfertigung an, daß die Rotationsachse der Erde längs der Weltlinie des Schwerpunktes parallel verschoben wird.

Unter den angegebenen Annahmen findet Fokker eine reguläre Präzessionsbewegung der Erdachse, bei der die Präzessionsachse zur Ekliptik senkrecht ist Die Präzessionsgeschwindigkeit ergibt sich zu 0,019 Bogensekunden im Jahre.

Wir wollen im folgenden zeigen, daß unsere dynamische Theorie zu einer völligen Rechtfertigung der Fokkerschen Annahmen führt.

§ 2.

Für die Rechnung von Fokker ist es nicht wesentlich, daß das Linienelement der Welt die strenge Form von Schwarzschild besitzt, sondern es genügt für dasselbe die bekannte angenäherte Form anzunehmen:

$$(2) \qquad d\bar{s}^2 = \left(1 - \frac{2\bar{U}}{c^2}\right)(d\bar{x}^0)^2 - \left(1 + \frac{2\bar{U}}{c^2}\right)\sum_{\alpha}(d\bar{x}^\alpha)^2$$

mit

$$(3) \qquad \bar{U} = \frac{f \cdot m_0}{\bar{\varrho}},$$

wo f die Gravitationskonstante, m_0 die Masse der Sonne und $\bar{\varrho}$ der räumliche Abstand des Punktes $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$ von der Sonne ist. Die Form (2) kennen wir schon aus Kapitel I als die erste Annäherung des Einsteinschen Linienelements, die die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik liefert, wenn wir überall die Glieder von höherer als zweiter Ordnung in $1:c$ vernachlässigen und

$$(4) \qquad \bar{x}^0 = c \cdot t$$

setzen, wo t die absolute Zeit ist. Wesentlich ist für den Fokkerschen Fall die spezielle Form des Potentials $\bar{U}$, die einem einzigen anziehenden Zentrum entspricht.

Wenn man überall Glieder in $1:c^3$ vernachlässigt, so findet man auch schon aus der Form (2) des Linienelements die Präzession von Fokker und Schouten. Es ist also besonders zu beachten, daß sich der relativistische Effekt der Präzession von Fokker schon ergibt, wenn wir für

das Linienelement der Welt eine Näherung einführen, die sonst noch keine relativistischen Korrektionen, sondern nur die klassische Mechanik liefert. Die Bewegung des Merkurperihels ergibt sich ja bekanntlich erst, wenn man das Linienelement der Welt in der weiteren Näherung

$$(5) \qquad d\bar{s}^2 = \left(1 - \frac{2\overline{U}}{c^2} + \frac{2\overline{U}^2}{c^4}\right)(d\bar{x}^0)^2 - \left(1 + \frac{2\overline{U}}{c^2}\right)\sum_\alpha (dx^\alpha)^2$$

annimmt und Glieder bis zur vierten Ordnung in $1:c$ berücksichtigt.

Dieselbe Sachlage wie für die Fokkersche Präzession besteht nun auch für unsere ganze dynamische Theorie des starren Körpers: schon bei der Näherung (2) stimmt sie nicht mit der klassischen überein. Das scheint mit der Tatsache im Widerspruch zu stehen, daß sich doch bei dieser Näherung aus unserem relativistischen dynamischen Prinzip Kapitel I (9) für die holonomen Systeme das gewöhnliche der klassischen Mechanik ergeben hat, findet aber die Begründung darin, daß die im Kapitel II eingeführten relativistischen Bindungen des starren Körpers auch bei der Näherung (2) nicht mit denen der klassischen Mechanik zusammenfallen. Trotzdem sich nun die klassische und die relativistische Theorie des starren Körpers schon bei der Näherung (2) unterscheiden, sind die für die Astronomie in Frage kommenden Abweichungen außerordentlich klein.

Nehmen wir z. B. die Erde näherungsweise als Kugel an, so würde sich im Gegensatz zu der klassischen Theorie, wo aus den Eulerschen Gleichungen die Konstanz des Vektors zur Winkelgeschwindigkeit $\tilde{\omega}_\alpha$ folgt, in der relativistischen Theorie nur die Konstanz des zu $\tilde{\omega}_\alpha$ proportionalen Vektors $\hat{\omega}_\alpha$ ergeben. Das haben wir in Kapitel III § 7 ja schon erwähnt. Nach Kapitel III (33) haben wir dann:

$$(6) \qquad \tilde{\omega}_\alpha = \text{konst.} \cdot \frac{d\sigma}{dt}.$$

Nun gilt bei der Näherung (2) auch für das Bogenelement der Weltlinie C:

$$(7) \qquad d\sigma^2 = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)(dx^0)^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\sum_\alpha (dx^\alpha)^2,$$

wo jetzt $U(x^1, x^2, x^3)$ die für die Koordinaten x^1, x^2, x^3 der Punkte von C als Argumente genommene Funktion U ist, also nach (3) gleich $\frac{f m_0}{\varrho}$ ist, wo ϱ jetzt die Entfernung Erde—Sonne darstellt. Unter Vernachlässigung der Glieder in $1:c^3$ folgt aus (7):

$$(8) \qquad \frac{1}{c}\frac{d\sigma}{dt} = 1 - \frac{U + \frac{1}{2}v^2}{c^2} \qquad \left[v^2 = \sum_\alpha \left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)^2\right],$$

also nach (6) wegen der Konstanz von c:

$$\tilde{\omega}_\alpha = \text{konst.} \cdot \left[1 - \frac{U + \frac{1}{2} v^2}{c^2}\right]. \tag{9}$$

Sowohl U wie v sind nun um so größer, je näher die Erde der Sonne ist. Die Rotationsgeschwindigkeit der Erde ist also um so kleiner, je näher die Erde der Sonne ist. Man kann daher in diesem Sinne sagen, daß die 24-Stunden-Tage im Sommer länger sind als im Winter.

Wegen der geringen Abweichung der elliptischen Bahn der Erde von einer Kreisbahn mit der Sonne als Mittelpunkt und weil $v^2 : c^2$ nur von der Größenordnung 10^{-8} ist, liegt dieser Effekt aber weit unter der Beobachtungsgrenze. Bei diesem Effekt handelt es sich ja auch um einen periodischen Effekt, und nicht wie bei der Präzession von Fokker um einen säkularen Effekt, der sich im Laufe der Jahre additiv verstärkt.

§ 3.

Da wir in unserer Theorie der Erdrotation die Bahn des Erdschwerpunktes immer als empirisch gegeben annehmen wollen, so werden die Funktionen $x^i(\sigma)$ für uns bekannte Funktionen sein. Wir können dann die Gleichungen (40) ganz beiseite lassen und uns nur um die Gleichungen (41) kümmern, die uns dann zur Bestimmung der Funktionen $\hat{\omega}_\alpha(\sigma)$ dienen, also zur Bestimmung der Rotation um den Schwerpunkt. Die erste primitive Näherung war für uns die eines Linienelements der Form (2) und einer kugelförmig angenommenen Erde.

Wir wollen jetzt erstens das Linienelement der Welt in der Form (2) annehmen, ohne daß wir für U mehr die spezielle Annahme (3) machen. Wir wollen vielmehr U als eine ganz beliebige Potentialfunktion voraussetzen. Wir können daher auch mehrere anziehende Zentren voraussetzen (bei der Erde z. B. auch die Einwirkung des Mondes berücksichtigen). Zweitens wollen wir die Annahme eines Körpers von sphärischer Struktur fallen lassen. Für den Fall der Erde bemerken wir dabei: Die Terme, die bei dieser neuen Näherung durch die Abplattung der Erde hinzukommen, fallen viel mehr ins Gewicht als etwaige Terme, die hinzukämen, wenn wir für das Linienelement der Welt noch eine weitere Näherung annehmen würden und etwa auch die Terme mit $1 : c^3$ berücksichtigen würden. Denn da die Größe $v : c$ (wo v die mittlere Erdgeschwindigkeit ist) die Größenordnung 10^{-4} hat, also eine viel kleinere als die Abplattung $\varkappa$ der Erde, haben die Terme in $v^3 : c^3$, die in (2) bezüglich der Terme mit $v^2 : c^2$ vernachlässigt werden, einen viel geringeren Einfluß als die Terme, die sich auf die Abplattung beziehen.

Wir wollen jetzt die durch (37) gegebene Funktion Ω für die Näherung (2) berechnen. Aus (2) resp. (7) folgt

$$(10)\qquad g_{00}=1-\frac{2U}{c^2};\qquad g_{0\alpha}=0;\qquad g_{\alpha\beta}=-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)\delta_{\alpha\beta}\qquad[\alpha,\beta=1,2,3];$$

für die Christoffelsymbole Γ^i_{kl} ergibt sich dann

$$(11)\qquad \Gamma^0_{00}=\Gamma^0_{\alpha\beta}=\Gamma^\alpha_{0\beta}=0;\qquad \Gamma^0_{0\alpha}=\Gamma^\alpha_{00}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x^\alpha};$$
$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=\frac{1}{c^2}\left[\delta_{\beta\alpha}\frac{\partial U}{\partial x^\gamma}+\delta_{\gamma\alpha}\frac{\partial U}{\partial x^\beta}-\delta_{\beta\gamma}\frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\right].$$

Unter Berücksichtigung von $x^0=ct$ und (8) ergibt sich, wenn wir Glieder in $1:c$ vernachlässigen:

$$(12)\qquad \begin{cases}\dfrac{dx^0}{d\sigma}=1+\dfrac{1}{c^2}\left(U+\dfrac{1}{2}v^2\right); & \dfrac{d^2x^0}{d\sigma^2}=0,\\[2ex] \dfrac{dx^\alpha}{d\sigma}=\dfrac{1}{c}\dfrac{dx^\alpha}{dt}; & \dfrac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2x^\alpha}{dt^2}.\end{cases}$$

Schreiben wir nun Kapitel III (4) in der Form

$$(13)\qquad \frac{du^i_\alpha}{dt}=-\Gamma^i_{kl}u^k_\alpha\frac{dx^l}{dt}-\left[g_{rt}u^r_\alpha\left(\frac{d^2x^t}{d\sigma^2}-\Gamma^t_{pq}\frac{dx^p}{d\sigma}\frac{dx^q}{d\sigma}\right)\right]\frac{dx^i}{dt}$$

so, ergibt sich für $i=0$

$$(14)\qquad \frac{du^0_\alpha}{dt}=-\Gamma^0_{kl}u^k_\alpha\frac{dx^l}{dt}-\left[g_{rt}u^r_\alpha\left(\frac{d^2x^t}{d\sigma^2}+\Gamma^t_{pq}\frac{dx^p}{d\sigma}\frac{dx^q}{d\sigma}\right)\right]\cdot c$$

und nach (11) und (12) haben alle Glieder rechts den Faktor $1:c$. Es gilt also für u^0_α eine Darstellung:

$$(15)\qquad u^0_\alpha=p_\alpha+\frac{1}{c}[q_\alpha(t)],$$

wo die von $1:c$ freien Glieder p_α Konstante sind. Für $i=\gamma=1,2,3$ ergibt sich aus (13)

$$(16)\qquad \frac{du^\gamma_\alpha}{dt}=-\Gamma^\gamma_{kl}u^k_\alpha\frac{dx^l}{dt}-\left[g_{rt}u^r_\alpha\left(\frac{d^2x^t}{d\sigma^2}+\Gamma^t_{pq}\frac{dx^p}{d\sigma}\frac{dx^q}{d\sigma}\right)\right]\frac{dx^\gamma}{dt}$$

und mittels (11), (12), (15) ersieht man, daß alle Glieder rechts den Faktor $1:c^2$ tragen. Es gilt daher für die u^γ_α eine Darstellung

$$(17)\qquad u^\gamma_\alpha=r^\gamma_\alpha+\frac{1}{c^2}[s^\gamma_\alpha(t)],$$

wo die r^γ_α Konstante sind.

Schreiben wir jetzt die Bedingung Kapitel III (5)$_2$ in der Form

$$(18)\qquad \frac{1}{c}\left[g_{ik}\frac{dx^i}{dt}u^k_\alpha\right]=0$$

und berücksichtigen wir nur das von $1:c$ freie Glied, so ergibt sich [nach (15)]:

$$p_\alpha \equiv 0.$$

Die drei räumlichen Vektoren (17) $u_\alpha^1, u_\alpha^2, u_\alpha^3$ sind nun nach Kapitel II drei paarweise senkrechte Einheitsvektoren, die bis auf eine ternäre orthogonale Substitution mit konstanten Koeffizienten bestimmt sind. Wir können daher speziell die Konstanten r_α^γ in (17) gleich $\delta_{\alpha\gamma}$ machen. Somit haben wir jetzt für die u_α^i die Darstellungen:

$$(19) \qquad \begin{cases} u_\alpha^0 = \frac{1}{c}[\ldots] \\ u_\alpha^\gamma = \delta_{\alpha\gamma} + \frac{1}{c^2}[\ldots]. \end{cases}$$

§ 4.

Jetzt wollen wir in dem Ausdruck Kapitel III (37) den Parameter τ mit der absoluten Zeit t zusammenfallen lassen. Wir erhalten bei Vernachlässigung von Gliedern in $1:c^3$ auf der rechten Seite:

$$(20) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{c}\mathfrak{L} = M\Big[1 - \frac{1}{c^2}\Big(U + \frac{1}{2}v^2\Big)\Big] \\ - \frac{1}{2c^2}\Big\{\sum_\alpha B_\alpha \tilde{\omega}_\alpha^2 - R_{iiks}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}u_\alpha^l u_\beta^s \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta A^{\gamma\varepsilon}\Big\}. \end{aligned}$$

In der Summe des letzten Gliedes kommen nur von $1:c$ freie Glieder in Frage, da vor der geschweiften Klammer ja schon der Faktor $1:c^2$ steht. Nun haben auf Grund der Definitionsgleichungen des Tensors R_{iiks} wegen (11) alle seine Komponenten den Faktor $1:c^2$. Nun kann nur, wenn die Indizes i und k beide gleich 0 sind, wegen $\frac{dx^0}{dt} = c$ der Faktor $1:c^2$ der R_{iiks} wieder wegfallen. Daher bleibt nur: $c^2 \cdot R_{i00s} u_\alpha^l u_\beta^s \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta A^{\gamma\varepsilon}$ übrig. Nun dürfen weiter bei den u_α^i nur die in (19) auftretenden konstanten Glieder berücksichtigt werden. Daher bleibt: $c^2 \cdot R_{\alpha 00\beta} \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta A^{\gamma\varepsilon}$. Nun ist aber aus (11) leicht zu berechnen:

$$(21) \qquad R_{\alpha 00\beta} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}.$$

Somit erhält man

$$(22) \qquad \frac{1}{c}\mathfrak{L} = M - \frac{1}{c^2}\Big[M\Big(U + \frac{1}{2}v^2\Big) + \sum_\alpha B_\alpha \tilde{\omega}_\alpha^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\partial^2 U}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\xi_\gamma^\alpha \xi_\gamma^\beta A^\gamma\Big].$$

Hier sind jetzt die A^γ in Kapitel II bereits eingeführten Trägheitsmomente bezüglich der Hauptebenen, die nach Kapitel II (9) mit den Hauptträgheitsmomenten B_α zusammenhängen. Es ist im Hinblick auf die Aus-

führungen Kapitel III § 1 besonders zu bemerken, daß die Funktionen $u_\alpha^i(t)$ aus unserer Näherungsformel (22) ganz verschwunden sind. Wir wollen hier nur anführen, daß die $u_\alpha^i(t)$ auch noch verschwinden, wenn man zu einer weiteren Näherung übergeht, in der man das Linienelement (5) bis zu Gliedern in $1:c^4$ entwickelt und nur die Glieder mit dem Produkt $x\cdot\frac{v^4}{c^4}$ der beiden kleinen Größen x und $\frac{v^4}{c^4}$ als Faktor vernachlässigt.

Weil für das Variationsprinzip

$$\delta\int \mathfrak{L}\, dt = 0$$

additive und multiplikative Konstanten unwesentlich sind, können wir statt (22) auch

(23) $$\boxed{\delta\int \mathfrak{L}^*\, dt = 0}$$

schreiben mit

(24) $$\boxed{\mathfrak{L}^* = M\left(U+\frac{1}{2}v^2\right)+\frac{1}{2}\sum_\alpha B_\alpha\tilde{\omega}_\alpha^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\partial^2 U}{\partial x^\alpha\, x^\beta}\xi_\gamma^\alpha\,\xi_\gamma^\beta A^\gamma}.$$

§ 5.

Diese Funktion $\mathfrak{L}^*$ ist rein formal identisch mit der Hamiltonschen Funktion, die zu dem klassischen Problem des starren Körpers gehört. In der Tat, wenn wir mittels der Gleichungen Kapitel II (6)

(25) $$\bar{x}_\nu^\alpha = x^\alpha+\xi_\gamma^\alpha z_\nu^\gamma,$$

die sechs Parameter eines starren Systems (drei x^α und drei weitere, die in den ξ_γ^α enthalten sind) in den Ausdruck der klassischen Lagrangeschen Funktion Kapitel I (2)

(26) $$\Lambda = U^*+\sum_\nu \bar{T}_\nu$$

einführen, so findet man für die Gesamtenergie

(27) $$\sum_\nu \bar{T}_\nu = \frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}\sum_\alpha B_\alpha\tilde{\omega}_\alpha^2,$$

wo die $\tilde{\omega}_\alpha$ aus den $\frac{d\xi_\gamma^\alpha}{dt}$ mittels der Formeln Kapitel III (27), (30) bestimmt sind.

Wenn wir weiter die Annahme machen, daß der größte Durchmesser des starren Körpers so klein ist im Verhältnis zu der Entfernung des Körpers von den potenzierenden Massen, daß man die Glieder von höherer Ordnung als der zweiten in den $\bar{x}_\nu^\alpha - x^\alpha$ und z_ν^γ vernachlässigen kann, so

hat man für das Gesamtpotential der Punkte $\bar{x}_\nu^\alpha$ des Körpers, d. h. für

$$U^* = \sum_\nu m_\nu \bar{U}_\nu \tag{28}$$

die Entwicklung:

$$U^* = \sum_\nu m_\nu \cdot U + \sum_{\alpha,\nu} m_\nu \frac{\partial U}{\partial x^\alpha}(\bar{x}_\nu^\alpha - x^\alpha) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\nu} m_\nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}(\bar{x}_\nu^\alpha - x^\alpha)(\bar{x}_\nu^\beta - x^\beta), \tag{29}$$

wo U wieder das Potential im Schwerpunkt ist. Daraus folgt mittels (10), wenn wir wieder die Bedingungen berücksichtigen, die sich ergeben, wenn wir x^α mit dem Schwerpunkt und die z^α mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen lassen:

$$U^* = MU + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial^2 U}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \xi_\gamma^\alpha \xi_\gamma^\beta A^\gamma. \tag{30}$$

Diese Gleichung zusammen mit (17) beweist in der Tat, daß die Funktion A in (11) formal mit (24) identisch ist.

Aber gegenüber dieser formalen Übereinstimmung müssen wir betonen, daß die Bedeutung der $\tilde{\omega}_\alpha$ in beiden Fällen verschieden ist. Im klassischen Fall kennzeichnen die $\tilde{\omega}_\alpha$ die Winkelgeschwindigkeit des körperfesten Systems z^α in bezug auf ein System η^α von Achsen, die raumfeste Richtungen haben, im relativistischen Fall aber in bezug auf ein System von Achsen η^α, die ihrerseits noch wieder nach dem Gesetz von Fermi längs der Weltlinie des Schwerpunktes verschoben werden, so daß sie z. B. im Fall des Effektes von Fokker-Schouten noch eine reguläre Präzession in bezug auf ein drittes System von raumfesten Achsenrichtungen beschreiben.

Weil aber in beiden Fällen die Rotation des Systems z^α bezüglich des Systems η^α demselben mechanischen Gesetz gehorcht [nämlich dem aus der Hamiltonschen Funktion (24) resultierenden], besteht der ganze Unterschied allein darin, daß man im relativistischen Fall der durch die klassische Mechanik berechneten Rotationsbewegung die „relativistische Präzession", die sich aus der Fermischen Verschiebung ergibt, zu superponieren hat. Im Fall von Fokker hat man also der klassischen Rotationsbewegung der Erde die von Fokker berechnete relativistische reguläre Präzession zu superponieren.

§ 6.

Bekanntlich sind die beiden einzigen Gestirne, die einen beobachtbaren Einfluß auf die Rotationsbewegung der Erde besitzen, die Sonne

und der Mond[15]). Die klassische Präzession der Erde zerfällt in zwei Präzessionen der gleichen Art, von denen die eine sich als von der Anziehung des Mondes herrührend berechnet, die andere aber von der Anziehung der Sonne. Man findet zwei reguläre Präzessionen, die beide, wie ja auch die Präzession von Fokker, eine zu der Ekliptik senkrechte Präzessionsachse haben. Und zwar ergibt sich die vom Monde herrührende Präzession mehr als doppelt so groß, wie die von der Sonne herrührende[15]).

Weil nun reguläre Präzessionen mit derselben Achse sich additiv überlagern, so zerlegt sich im relativistischen Fall die Präzession der Erde in drei Teile: In die Präzession von Fokker-Schouten, in die vom Monde herrührende Präzession und in die von der Sonne herrührende Präzession. Aber die erste ist nur $^1/_{2500}$ der Gesamtpräzession, die sich astronomisch als etwa 50 Bogensekunden jährlich bestimmt.

Wenn der Effekt der Fokkerschen Präzession bei dem jetzigen Stande der Physik noch nicht beobachtbar ist, so liegt das vor allem an der Ungenauigkeit unserer Kenntnis der Trägheitsmomente der Erde. Man muß diese sehr genau kennen, um die Einwirkung von Sonne und Mond auf die Präzession der Erde mit einer solchen Genauigkeit bestimmen zu können, daß auch der kleine Betrag der relativistischen Präzession ihnen gegenüber zur Geltung kommt.

§ 7.

Wir schließen noch eine letzte Bemerkung an: Wenn wir mit U_M das partielle vom Monde herrührende Potential bezeichnen, so hat U_M die Größenordnung $(f\mu):\sigma$, wo f die Gravitationskonstante, μ die Masse des Mondes und σ die mittlere Entfernung Erde—Mond ist. Zum Unterschied von U_M haben seine ersten Ableitungen $\frac{\partial U_M}{\partial x^\alpha}$ die Größenordnung $(f\mu):\sigma^2$ und seine zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 U_M}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ die Größenordnung $(f\mu):\sigma^3$.

Wenn wir mit m_0 die Masse der Sonne und mit ϱ die mittlere Entfernung Erde—Sonne bezeichnen, so haben die Verhältnisse $\mu:m$ und $\sigma:\varrho$ empirisch die Größenordnungen:

$$\mu : m_0 \sim 4 \cdot 10^{-8},$$

$$\sigma : \varrho \sim \frac{1}{400}.$$

Man findet dann, daß U_M und $\frac{\partial U_M}{\partial x^\alpha}$ sich gegenüber den entsprechenden

---

[15]) Siehe etwa: Levi-Civita-Amaldi. Lezioni di meccanica razionale (Bologna, Zanichelli), Bd. I Seite 496 ff., Bd. II_2 Seite 391—412.

Termen des Potentials der Sonne vernachlässigen lassen, während $\frac{\partial U_M}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ eine Größenordnung hat, die derjenigen der zweiten Ableitungen des Potentials der Sonne vergleichbar ist. Daher ist der Einfluß des Mondes auf die Erdbewegung nur spürbar, soweit diese von dem letzten Term in (24) herrührt. Da wir nach Kapitel III § 6 die Bahn des Schwerpunktes der Erde mit sehr großer Annäherung als eine geodätische Linie in der Welt mit dem Bogenelement

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ik}\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^k$$

voraussetzen können, und da sich die geodätischen Linien nur durch erste Ableitungen der $\bar{g}_{ik}$ bestimmen, in der Näherung (2) also nach (11) durch erste Ableitungen des Potentials U, so ist der Mond für die Bewegung des Schwerpunktes ohne merklichen Einfluß. Er kommt daher nur für die Rotation in Frage, dort aber auch nur in dem Anteil der klassischen Präzession, und nicht in dem Anteil der relativistischen Präzession, die durch die Verschiebung von Fermi bestimmt wird. Denn in dem Verschiebungsgesetz Kapitel III (4) kommen nur erste Ableitungen der g_{ik}, also [im Fall unserer Approximation] der U vor. Es ist somit die Annahme von Fokker vollkommen gerechtfertigt, daß bei der Berechnung der relativistischen Präzession nur das Gravitationsfeld der Sonne zu berücksichtigen ist.

(Eingegangen am 1. März 1928.)

Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen.

Von

Oskar Perron in München.

Einleitung.

In dieser Arbeit handelt es sich um Differentialgleichungssysteme der Form

$$\frac{dx_\nu}{dt} = a_{\nu 1} x_1 + \ldots + a_{\nu n} x_n + \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die $a_{\nu\mu}$ Konstanten sind, wobei ferner $\varphi_\nu(0, \ldots, 0, t) = 0$ ist und im übrigen die $|\varphi_\nu|$ sehr klein sind, was genauer präzisiert werden wird. Die unabhängig Variable t denken wir reell und beschränken sie auf das einseitig unendliche Intervall $t \geqq 0$. Wir können t etwa als Zeit ansprechen, und die Differentialgleichungen stellen dann ein Bewegungsgesetz für ein System materieller Punkte dar, deren Bahnkurven zu bestimmen sind. Jedoch lassen wir für die x_ν, $a_{\nu\mu}$ und die Funktionen φ_ν beliebige komplexe Werte zu. Die Existenz der Integrale ergibt sich dann, wenn die φ_ν stetig sind, für hinreichend kleine t aus bekannten Sätzen, indem man alles in den reellen und imaginären Teil zerlegt.

Wegen $\varphi_\nu(0, \ldots, 0, t) = 0$ haben die Differentialgleichungen jedenfalls die triviale Lösung $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$. Diese heißt *stabil*, wenn es eine positive Zahl a von folgender Art gibt: Jedem ε zwischen 0 und a läßt sich ein ε_1 zwischen 0 und ε so zuordnen, daß jedes Integralsystem, für welches $0 < \sum |x_\nu(0)| < \varepsilon_1$ ist, für $t \geqq 0$ dauernd existiert und der Ungleichung $\sum |x_\nu(t)| < \varepsilon$ genügt.

Andernfalls heißt die Lösung *instabil*. Die Instabilität ist *vollkommen*, wenn es eine positive Zahl ε gibt derart, daß für *jedes* Integralsystem, welches der Ungleichung $0 < \sum |x_\nu(0)| < \varepsilon$ genügt, notwendig für ein endliches t einmal die Existenz aufhört oder wenigstens $\sum |x_\nu(t)| = \varepsilon$ wird.

Zwischen dem Fall der Stabilität und der vollkommenen Instabilität liegt der Fall *unvollkommener Instabilität*, den man aber meistens als *bedingte Stabilität* bezeichnet, obwohl er nicht ein Sonderfall der Stabilität, sondern der Instabilität ist. Dieser ist dadurch charakterisiert, daß es eine positive Zahl a von folgender Art gibt: Jeder Zahl ε zwischen 0 und a läßt sich ein ε_1 zwischen 0 und ε so zuordnen, daß wohl *einige*[1]), aber niemals *alle* Integrale, für die $0 < \sum |x_\nu(0)| < \varepsilon_1$ ist, für $t \geqq 0$ dauernd existieren und den Ungleichungen $\sum |x_\nu(0)| < \varepsilon$ genügen.

Die Stabilitätsfrage ist schon vielfach behandelt worden; die wichtigsten Arbeiten stammen von Liapounoff[2]), Poincaré[3]), Bohl[4]), Cotton[5]). Die zwei Erstgenannten setzen die Funktionen φ_ν in bezug auf $x_1, \ldots, x_n$ als Potenzreihen voraus, die mit Gliedern mindestens zweiter Dimension beginnen, und entwickeln dann die Integrale in Reihen nach Potenzen der Anfangswerte. Die meisten ihrer Resultate beruhen auf diesen Reihen, doch hat Liapounoff zur Entscheidung über Stabilität und Instabilität noch eine zweite Methode entwickelt (a. a. O. S. 255—267), die sich auch unter geringeren Voraussetzungen über die φ_ν durchführen ließe. Bohl und vor allem Cotton setzen weniger über die φ_ν voraus.

Ich werde im folgenden diesen ganzen Fragenkomplex erneut behandeln, wobei meine Voraussetzungen über die Funktionen φ_ν teils ungefähr die gleichen wie bei Cotton sind, teils noch wesentlich geringer. Bei der Feststellung bedingter Stabilität (§ 5) beruht meine Methode auf dem gleichen Grundgedanken wie die von Cotton; jedoch ist die Durchführung einfacher, und insbesondere machen die Fälle mehrfacher und imaginärer Wurzeln der charakteristischen Gleichung keinerlei Sonderbetrachtung erforderlich.

Im Fall der Stabilität ist es im allgemeinen so, daß die Integrale x_ν für $t \to \infty$ asymptotisch nach Null streben. In §§ 6 und 7 wird dieses asymptotische Verhalten genauer untersucht. Dabei zeigt sich, daß die

---

[1]) Gemeint ist: *mindestens eines*; aber dann sind es, weil ε beliebig verkleinert werden darf, von selbst unendlich viele.

[2]) A. Liapounoff, Problème général de la stabilité du mouvement, Annales de la faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques [2] **9** (1907), p. 203—474, Übersetzung aus dem Russischen 1892.

[3]) H. Poincaré, Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique, Acta Mathematica **13** (1890), p. 1—270. — Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste **1**, chap. 7, Paris 1892.

[4]) P. Bohl, Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage, Journal für die reine und angewandte Mathematik **127** (1904), S. 179—276.

[5]) E. Cotton, Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles, Annales scientifiques de l'École normale supérieure [3] **28** (1911), p. 473—521.

Integrale je nach den Anfangswerten in verschiedene Klassen zerfallen, die von verschiedener Ordnung klein werden. Im Fall die φ_ν Potenzreihen sind, konnte das bereits von Liapounoff und Poincaré aus ihren Reihenentwicklungen geschlossen werden. Es liegen hier ähnliche Verhältnisse vor wie bei den von Poincaré und mir untersuchten linearen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten für $t \to \infty$ gegen endliche Grenzwerte streben. Die früher auf diesem Gebiet von mir erzielten Resultate lassen sich auch als Spezialfälle unter die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit subsumieren (§ 8).

§ 1.

Die Bedingungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und die charakteristischen Wurzeln.

Um öftere Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir hier einige abkürzende Festsetzungen treffen.

I. Wenn die Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)$ in einem Bereich der Gestalt

$$|x_1| \leqq a, \ldots, |x_n| \leqq a, \quad t \geqq 0,$$

wo natürlich $a > 0$ ist, definiert und stetig ist, und wenn sie daselbst der Ungleichung

$$|\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)| \leqq K(|x_1| + \ldots + |x_n|)$$

genügt, wo K eine positive Konstante, so sagen wir, die Funktion erfüllt die Bedingung $\mathfrak{A}$. Offenbar ist dann von selbst

$$\varphi(0, \ldots, 0, t) = 0,$$
$$|\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)| \leqq nKa.$$

Wenn wir also von einer oder mehreren Funktionen sagen, daß sie die Bedingung $\mathfrak{A}$ erfüllen, so ist damit immer ein Bereich für die Variablen gegeben; wir nennen a die erste, K die zweite Konstante der Bedingung $\mathfrak{A}$.

II. Wenn die Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)$ der Forderung genügt:

$$\frac{\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)}{|x_1| + \ldots + |x_n|} \to 0 \quad \text{für} \quad |x_1| + \ldots + |x_n| \to 0, \quad t \to \infty,$$

d. h. wenn jeder positiven Zahl ε zwei positive Zahlen δ_ε und T_ε zugeordnet werden können derart, daß im Bereich

$$|x_1| \leqq \delta_\varepsilon, \ldots, |x_n| \leqq \delta_\varepsilon, \quad |x_1| + \ldots + |x_n| > 0, \quad t \geqq T_\varepsilon$$

stets die Ungleichung

$$|\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)| \leqq \varepsilon(|x_1| + \ldots + |x_n|)$$

gilt, so sagen wir, die Funktion erfüllt die Bedingung $\mathfrak{B}$.

Die Bedingung $\mathfrak{B}$ ist z. B. erfüllt, wenn für alle hinreichend großen t gleichmäßig die Beziehung gilt:

$$\lim_{\substack{x_1 \to 0 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to 0}} \frac{\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)}{|x_1| + \ldots + |x_n|} = 0;$$

ebenso auch, wenn in einem Bereich der Gestalt

$$|x_1| \leqq a, \ \ldots, \ |x_n| \leqq a, \qquad |x_1| + \ldots + |x_n| > 0$$

gleichmäßig die Beziehung gilt:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)}{|x_1| + \ldots + |x_n|} = 0.$$

III. Wenn die Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)$ so beschaffen ist, daß jeder positiven Zahl ε zwei positive Zahlen δ_ε und T_ε zugeordnet werden können derart, daß für

$$|x_1'| \leqq \delta_\varepsilon, \ |x_1''| \leqq \delta_\varepsilon, \ \ldots, \ |x_n'| \leqq \delta_\varepsilon, \ |x_n''| \leqq \delta_\varepsilon, \qquad t \geqq T_\varepsilon$$

stets die Ungleichung

$$|\varphi(x_1', \ldots, x_n', t) - \varphi(x_1'', \ldots, x_n'', t)| \leqq \varepsilon(|x_1' - x_1''| + \ldots + |x_n' - x_n''|)$$

gilt, so sagen wir, die Funktion erfüllt die Bedingung $\mathfrak{C}$.

Man sieht leicht, wenn die Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n, t)$ die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ erfüllt, so erfüllt sie von selbst auch die Bedingung $\mathfrak{B}$. Denn wegen der Bedingung $\mathfrak{A}$ ist $\varphi(0, \ldots, 0, t) = 0$, und also wegen der Bedingung $\mathfrak{C}$, wenn man sie speziell für $x_1'' = 0, \ldots, x_n'' = 0$ in Anspruch nimmt,

$$|\varphi(x_1', \ldots, x_n', t)| \leqq \varepsilon(|x_1'| + \ldots + |x_n'|)$$

für

$$|x_1'| \leqq \delta_\varepsilon, \ldots, |x_n'| \leqq \delta_\varepsilon, \qquad t \geqq T_\varepsilon.$$

Das bedeutet aber das Erfülltsein der Bedingung $\mathfrak{B}$.

IV. Wenn die beiden Funktionen

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + \varphi(x_1, \ldots, x_n, t),$$
$$b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n + \psi(x_1, \ldots, x_n, t),$$

wo die a_ν, b_ν Konstanten sind, miteinander identisch sind und wenn die Funktionen φ, ψ die Bedingung $\mathfrak{B}$ erfüllen, so sieht man leicht, daß dann notwendig

$$a_1 = b_1, \ \ldots, \ a_n = b_n, \ \varphi = \psi$$

ist. In der Tat ist wegen der Bedingung $\mathfrak{B}$

$$|(a_1 - b_1)x_1 + \ldots + (a_n - b_n)x_n|$$
$$= |\varphi - \psi| \leqq |\varphi| + |\psi| \leqq 2\varepsilon(|x_1| + \ldots + |x_n|),$$

sobald nur

$$|x_1| \leqq \delta_\varepsilon, \ \ldots, \ |x_n| \leqq \delta_\varepsilon, \qquad |x_1| + \ldots + |x_n| > 0, \qquad t \geqq T_\varepsilon$$

ist. Setzt man insbesondere alle x_ν gleich null bis auf eines, etwa x_k, so kommt

$$|(a_k - b_k)x_k| \leqq 2\varepsilon |x_k|, \qquad \text{also} \qquad |a_k - b_k| \leqq 2\varepsilon .$$

Da aber ε beliebig klein sein darf, ergibt sich $a_k = b_k$. Das gilt für alle k, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Wenn in dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_\nu}{dt} = a_{\nu 1} x_1 + \ldots + a_{\nu n} x_n + \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen φ_ν die Bedingung $\mathfrak{B}$ erfüllen, so sind hiernach die Konstanten $a_{\nu\mu}$ eindeutig. Daher sind auch die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

eindeutig bestimmt. Wir nennen sie die *charakteristischen Wurzeln* des Differentialgleichungssystems.

§ 2.

Vorbereitende Sätze.

Satz 1. *Wenn die in dem Intervall* $\tau_0 \leqq t \leqq \tau_1$ *definierten Funktionen*

$$x_1(t), \ \ldots, \ x_n(t)$$

daselbst dem Differentialgleichungssystem genügen:

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die Funktionen φ_ν *die Bedingung* $\mathfrak{A}$ *erfüllen, so gilt für je zwei Werte* t_0, t_1 *des Intervalles stets die Ungleichung*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t_1)|^2 \leqq e^{2nK|t_1 - t_0|} \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t_0)|^2,$$

wo K *die zweite Konstante der Bedingung* $\mathfrak{A}$ *bedeutet.*

Beweis. Aus den Differentialgleichungen ergibt sich, indem man mit $\bar{x}_\nu$ multipliziert[6]) und den reellen Teil nimmt,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x_\nu|^2 = \Re\left(\bar{x}_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\right) = \Re(\bar{x}_\nu \varphi_\nu) \begin{cases} \leqq & |x_\nu \varphi_\nu| \\ \geqq & -|x_\nu \varphi_\nu| . \end{cases}$$

---

[6]) Hier und auch überall später haben der Querstrich und das Zeichen $\Re$ die folgende Bedeutung: $\bar{x}$ ist die zu x konjugiert-komplexe Zahl, $\Re(x)$ ist der reelle Teil von x.

Also ist wegen der Bedingung $\mathfrak{A}$ auch

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x_\nu|^2 \begin{cases} \leqq & K|x_\nu|(|x_1|+\ldots+|x_n|) \\ \geqq & -K|x_\nu|(|x_1|+\ldots+|x_n|). \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Summation nach ν und Multiplikation mit 2:

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2 \begin{cases} \leqq & 2K(|x_1|+\ldots+|x_n|)^2 \leqq 2nK\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2 \\ \geqq & -2K(|x_1|+\ldots+|x_n|)^2 \geqq -2nK\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2, \end{cases}$$

oder was dasselbe sagt:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2nKt}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2\right) \leqq 0, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2nKt}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2\right) \geqq 0. \tag{2}$$

Für $t_1 \geqq t_0$ folgt aber aus (1)

$$e^{-2nKt_1}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t_1)|^2 \leqq e^{-2nKt_0}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t_0)|^2,$$

also auch

$$\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t_1)|^2 \leqq e^{2nK(t_1-t_0)}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t_0)|^2 \quad \text{für} \quad t_1 \geqq t_0.$$

Ebenso folgt für $t_1 \leqq t_0$ aus (2)

$$e^{2nKt_1}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t_1)|^2 \leqq e^{2nKt_0}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t_0)|^2,$$

also auch

$$\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t_1)|^2 \leqq e^{2nK(t_0-t_1)}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu(t_0)|^2 \quad \text{für} \quad t_1 \leqq t_0.$$

Beide Ungleichungen zusammen besagen aber so viel wie die in Satz 1 behauptete Ungleichung.

Wir ziehen aus Satz 1 zwei Folgerungen (Satz 2 und 3).

Satz 2. *Wenn die Funktionen $x_\nu(t)$ in Satz 1 an einer gewissen Stelle t nicht sämtlich verschwinden, so können sie nirgends sämtlich verschwinden.*

In der Tat, wenn sie etwa an der Stelle t_0 sämtlich verschwinden würden, so müßten sie nach Satz 1 auch an jeder andern Stelle t_1 sämtlich verschwinden, entgegen der Voraussetzung.

Satz 3. *Wenn in dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen φ_ν die Bedingung $\mathfrak{A}$ erfüllen, so kann man jedem Paar positiver Zahlen T, ε (T beliebig groß, ε beliebig klein) eine positive Zahl $\delta = \delta_{T,\varepsilon}$ so zuordnen, daß ein Integralsystem, dessen Anfangswerte den Ungleichungen

$$|x_1(0)| \leqq \delta, \ldots, |x_n(0)| \leqq \delta$$

genügen, sich mindestens bis zur Stelle $t = T$ fortsetzen läßt und dabei dauernd den Ungleichungen genügt:

$$|x_1(t)| \leqq \varepsilon, \ldots, |x_n(t)| \leqq \varepsilon.$$

Man darf natürlich ε kleiner denken als die erste Konstante a der Bedingung $\mathfrak{A}$. Wählt man dann δ so, daß

$$\delta^2 \leqq \frac{1}{n} \varepsilon^2 e^{-2nKT}$$

ist, so gilt nach Satz 1, soweit eine Fortsetzung überhaupt möglich ist, die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)|^2 \leqq e^{2nKt} \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(0)|^2 \leqq e^{2nKt} \varepsilon^2 e^{-2nKT} = \varepsilon^2 e^{-2nK(T-t)},$$

also für $t \leqq T$ gewiß $|x_\nu(t)| \leqq \varepsilon$. Von jeder Stelle t_0 aus, für welche $|x_\nu(t_0)| \leqq \varepsilon$ ist, kann man aber, da nach Bedingung $\mathfrak{A}$ die Funktionen φ_ν noch für $|x_\nu - x_\nu(t_0)| \leqq a - \varepsilon$ stetig sind und daselbst $|\varphi_\nu| \leqq nKa$ ist, das Integralsystem nach einem bekannten Existenzsatz mindestens bis zur Stelle $t = t_0 + \frac{a-\varepsilon}{nKa\sqrt{2}}$ fortsetzen[7]), so daß in der Tat die Fortsetzung in endlich vielen Schritten auch bis zur Stelle T möglich ist.

§ 3.

Kriterien für Stabilität.

Satz 4. *In dem Differentialgleichungssystem*[8])

$$\frac{dx_\nu}{dt} \equiv \varrho_\nu x_\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_\mu + \psi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

---

[7]) Man zerlege zunächst beide Seiten der Differentialgleichungen in den reellen und imaginären Teil und benutze dann etwa Satz 2 meiner Arbeit: Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen. Mathematische Annalen **78** (1918), 378—384.

[8]) Hier und auch überall später ist unter einer Summe der Form $\sum_{\mu=1}^{\nu-1} a_\mu$, wenn $\nu = 1$ ist, stets die Null zu verstehen. Ebenso ist später unter einer Summe der Form $\sum_{\mu=k+1}^{n} a_\mu$, wenn $k = n$ ist, stets die Null zu verstehen.

mögen die Konstanten ϱ_ν negative reelle Teile haben, und es mögen drei Zahlen γ, C, α durch die Formeln

$$-\gamma = \operatorname{Max} \Re(\varrho_\nu), \quad C = \operatorname{Max} |c_{\nu\mu}|,$$

$$\alpha = \begin{cases} \operatorname{Min}\left(1, \frac{\gamma}{2(n-1)C}\right), & \text{falls } (n-1)C > 0 \\ 1, & \text{falls } (n-1)C = 0 \end{cases}$$

definiert werden. Wenn dann die Funktionen ψ_ν die Bedingung $\mathfrak{A}$ erfüllen und in dem dadurch gegebenen Bereich den Ungleichungen

$$|\psi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t)| \leqq \tfrac{\gamma}{2n}(|x_1| + \alpha|x_2| + \ldots + \alpha^{n-1}|x_n|)$$

genügen, so ist das triviale Integralsystem $x_\nu = 0$ stabil, und zwar gelten für jedes Integralsystem, dessen Anfangswerte $x_\nu(0)$ absolut hinreichend klein sind, sogar die Beziehungen

$$\lim_{t\to\infty} x_1 = 0, \ldots, \lim_{t\to\infty} x_n = 0.$$

Beweis. Ist ε eine hinreichend und beliebig kleine positive Zahl, so wählen wir die Anfangswerte $x_\nu(0)$ so, daß die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha^{2\nu} |x_\nu|^2 \leqq \varepsilon^2 e^{-\frac{1}{2}\gamma t} \tag{3}$$

für $t = 0$ besteht. Das Integralsystem existiert dann jedenfalls für genügend kleine Werte von t. Wenn wir zeigen können, daß, soweit es sich fortsetzen läßt, stets die Ungleichung (3) erfüllt bleibt, so ergibt sich daraus sogleich die unbegrenzte Fortsetzbarkeit analog wie am Schluß des § 2, und da dann die Ungleichung (3) auch für beliebig große t gilt, wird damit der Satz 4 bewiesen sein.

Nun folgt aus den gegebenen Differentialgleichungen, indem man mit $\bar{x}_\nu$ multipliziert und den reellen Teil nimmt,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}|x_\nu|^2 &= \Re(\varrho_\nu)|x_\nu|^2 + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \Re(c_{\nu\mu}\bar{x}_\nu x_\mu) + \Re(\bar{x}_\nu \psi_\nu) \\ &\leqq -\gamma|x_\nu|^2 + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |c_{\nu\mu} x_\nu x_\mu| + |x_\nu \psi_\nu| \\ &\leqq -\gamma|x_\nu|^2 + C\sum_{\mu=1}^{\nu-1} |x_\nu x_\mu| + \tfrac{\gamma}{2n}|x_\nu| \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{\mu-1}|x_\mu|. \end{aligned}$$

Also wenn man mit $\alpha^{2\nu}$ multipliziert und dann nach ν summiert,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|x_\nu|^2 \leqq -\gamma\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|x_\nu|^2 + C\sum_{\nu>\mu}^{1,n}\alpha^{2\nu}\,x_\nu\,x_\mu$$

$$+\frac{\gamma}{2n}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|x_\nu|\sum_{\mu=1}^{n}\alpha^{\mu-1}|x_\mu|\,.$$

Nun gelten aber, weil $\alpha \leqq 1$ ist, die Abschätzungen

$$(4)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu>\mu}^{1,n}\alpha^{2\nu}|x_\nu x_\mu| \leqq \alpha\sum_{\nu>\mu}^{1,n}\alpha^{\nu+\mu}|x_\nu x_\mu| \\ \displaystyle\leqq\frac{\alpha}{2}\sum_{\nu>\mu}^{1,n}[(\alpha^\nu|x_\nu|)^2+(\alpha^\mu|x_\mu|)^2] = \frac{(n-1)\alpha}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|x_\nu|^2, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|x_\nu|\sum_{\mu=1}^{n}\alpha^{\mu-1}\,x_\mu| \leqq \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\alpha^{\nu+\mu}|x_\nu x_\mu| \\ \displaystyle\leqq\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}[(\alpha^\nu|x_\nu|)^2+(\alpha^\mu|x_\mu|)^2] = n\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|x_\nu|^2. \end{cases}$$

Setzt man das oben ein, so kommt

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|x_\nu|^2 \leqq \Big[-\gamma + C\frac{(n-1)\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\Big]\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|x_\nu|^2.$$

Nach der Definition von α in Satz 4 ist aber $C(n-1)\alpha \leqq \frac{\gamma}{2}$, so daß man weiter erhält:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|x_\nu|^2 \leqq -\frac{\gamma}{4}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|x_\nu|^2.$$

Das besagt aber soviel wie

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{\frac{1}{2}\gamma t}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|x_\nu|^2\Big) \leqq 0.$$

Daher nimmt die in der Klammer stehende Funktion monoton ab, und es ist

$$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|x_\nu|^2 \leqq e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|x_\nu(0)|^2 \leqq e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\varepsilon^2,$$

was zu beweisen war.

Satz 5. *Wenn in dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{dx_\nu}{dt} = a_{\nu 1}x_1 + \ldots + a_{\nu n}x_n + \varphi_\nu(x_1,\ldots,x_n,t) \quad (\nu = 1,2,\ldots,n)$$

die Funktionen φ_ν die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen und wenn die charakteristischen Wurzeln lauter negative reelle Teile haben, so ist das triviale Integralsystem $x_\nu = 0$ stabil, und zwar gelten für jedes Integralsystem, dessen Anfangswerte $x_\nu(0)$ absolut hinreichend klein sind, sogar die Beziehungen

$$\lim_{t\to\infty} x_1 = 0, \ldots, \lim_{t\to\infty} x_n = 0.$$

Beweis. Bezeichnet man die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mit A und die charakteristischen Wurzeln mit $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$, so kann man bekanntlich auf mannigfache Art eine Matrix B mit von Null verschiedener Determinante angeben, für welche

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \varrho_1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ c_{21} & \varrho_2 & \ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots\ldots & \varrho_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

ist. Dabei können die Konstanten $c_{\nu\mu}$, wenn alle ϱ_λ voneinander verschieden sind, durch geeignete Wahl von B sogar alle gleich Null gemacht werden; wenn gleiche ϱ_λ vorhanden sind, ist das im allgemeinen nicht möglich, doch wird das gar keine Rolle spielen.

Macht man jetzt die lineare Transformation

$$(x_1, \ldots, x_n) = B(y_1, \ldots, y_n), \tag{7}$$

so geht das Differentialgleichungssystem von Satz 5 über in

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \varrho_\nu y_\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} y_\mu + \psi_\nu(y_1, \ldots, y_n, t) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

wo offenbar die Funktionen ψ_ν ebenfalls die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen. Führt man daher wie in Satz 4 die Abkürzungen

$$-\gamma = \operatorname{Max} \Re(\varrho_\nu), \qquad C = \operatorname{Max} |c_{\nu\mu}|,$$

$$\alpha = \begin{cases} \operatorname{Min}\left(1, \frac{\gamma}{2(n-1)C}\right), & \text{falls } (n-1)C > 0 \\ 1, & \text{falls } (n-1)C = 0 \end{cases}$$

ein, so ist wegen der Bedingung $\mathfrak{B}$ gewiß

$$|\psi_\nu(y_1, \ldots, y_n, t)| \leqq \frac{\gamma\alpha^{n-1}}{2n}(|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n|)$$

$$\leqq \frac{\gamma}{2n}(|y_1| + \alpha|y_2| + \ldots + \alpha^{n-1}|y_n|),$$

sobald nur t groß genug ist und die $|y_\nu|$ klein genug sind, also etwa für

$$t \geqq T, \quad |y_1| \leqq \delta, \ldots, |y_n| \leqq \delta.$$

Auf das Gleichungssystem (8) kann man daher den Satz 4 anwenden, wobei nur $t - T$ an Stelle von t zu setzen ist. Hiernach ist jedes Integralsystem y_ν von (8), welches für $t = T$ absolut hinreichend kleine Werte annimmt, bis zu beliebig großen Werten von t fortsetzbar, und die $|y_\nu|$ bleiben dabei dauernd unter einer willkürlich vorgebbaren Schranke und streben gegen Null. Entsprechendes gilt daher auch vermöge der Transformation (7) für jedes Integralsystem x_ν des ursprünglichen Systems, welches für $t = T$ absolut hinreichend kleine Werte annimmt. Letzteres ist aber nach Satz 3 bei jedem System x_ν der Fall, welches für $t = 0$ absolut hinreichend kleine Werte annimmt, und damit ist Satz 5 bewiesen.

§ 4.

Kriterien für Instabilität.

Satz 6. *In dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \varrho_\nu x_\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_\mu + \psi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

sei für einen gewissen Index k

$$\Re(\varrho_\nu) \geqq \gamma > 0 \qquad \text{für} \quad \nu \leqq k$$

und, sofern nicht $k = n$ ist,

$$\Re(\varrho_\nu) \leqq 0 \qquad \text{für} \quad \nu > k.$$

Ferner seien die Zahlen C, α durch die Formeln

$$C = \operatorname{Max} |c_{\nu\mu}|, \quad \alpha = \begin{cases} \operatorname{Min}\left(1, \frac{\gamma}{2(n-1)C}\right), & \text{falls } (n-1)C > 0 \\ 1 \qquad\qquad\qquad\quad , & \text{falls } (n-1)C = 0 \end{cases}$$

definiert. Wenn dann die Funktionen ψ_ν die Bedingung $\mathfrak{A}$ erfüllen und in dem dadurch gegebenen Bereich den Ungleichungen

$$|\psi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t)| \leqq \frac{\gamma}{4n}(|x_1| + \alpha|x_2| + \ldots + \alpha^{n-1}|x_n|)$$

genügen, so ist das triviale Integralsystem $x_\nu = 0$ instabil. Falls $k = n$ ist, ist es sogar vollkommen instabil.

Beweis. Aus den Differentialgleichungen ergibt sich wie schon öfter:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x_\nu|^2 \begin{cases} \leqq \Re(\varrho_\nu)|x_\nu|^2 + C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}|x_\nu x_\mu| + |x_\nu \psi_\nu| \\ \geqq \Re(\varrho_\nu)|x_\nu|^2 - C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}|x_\nu x_\mu| - |x_\nu \psi_\nu|. \end{cases}$$

Definiert man daher zwei Funktionen $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ durch die Formeln[9])

$$\Phi(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha^{2\nu} |x_\nu|^2, \qquad \Psi(t) = \sum_{\nu=k+1}^{n} \alpha^{2\nu} |x_\nu|^2,$$

so ist

$$\frac{1}{2}[\Phi'(t) - \Psi'(t)]$$

$$\geqq \sum_{\nu=1}^{k} \Re(\varrho_\nu)\, \alpha^{2\nu} |x_\nu|^2 - \sum_{\nu=k+1}^{n} \Re(\varrho_\nu)\, \alpha^{2\nu} |x_\nu|^2 - C \sum_{\nu>\mu}^{1,n} \alpha^{2\nu} |x_\nu x_\mu| - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha^{2\nu} |x_\nu \psi$$

$$\geqq \gamma \sum_{\nu=1}^{k} \alpha^{2\nu} |x_\nu|^2 + 0 - C \sum_{\nu>\mu}^{1,n} \alpha^{2\nu} |x_\nu x_\mu| - \frac{\gamma}{4n} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha^{2\nu} |x_\nu| \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{\mu-1} |x_\mu|,$$

und wenn man rechts wieder die Abschätzungen (4), (5) anwendet, nach Multiplikation mit 2

$$\Phi'(t) - \Psi'(t)$$

$$\geqq 2\gamma \sum_{\nu=1}^{k} \alpha^{2\nu} |x_\nu|^2 - 2C \frac{(n-1)\alpha}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha^{2\nu} |x_\nu|^2 - \frac{\gamma}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha^{2\nu} |x_\nu|^2$$

$$= 2\gamma\, \Phi(t) - \left[(n-1)C\alpha + \frac{\gamma}{2}\right][\Phi(t) + \Psi(t)].$$

Nach der Definition von α in Satz 6 ist aber $(n-1)C\alpha \leqq \frac{\gamma}{2}$, so daß man weiter erhält:

$$\Phi'(t) - \Psi'(t) \geqq 2\gamma\, \Phi(t) - \gamma[\Phi(t) + \Psi(t)] = \gamma[\Phi(t) - \Psi(t)],$$

oder, was dasselbe sagt,

$$\frac{d}{dt}\{e^{-\gamma t}[\Phi(t) - \Psi(t)]\} \geqq 0.$$

Daher ist die Funktion in der geschweiften Klammer monoton wachsend, woraus folgt:

$$\Phi(t) - \Psi(t) \geqq [\Phi(0) - \Psi(0)]\, e^{\gamma t}.$$

Erst recht ist also

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha^{2\nu} |x_\nu|^2 = \Phi(t) + \Psi(t) \geqq [\Phi(0) - \Psi(0)]\, e^{\gamma t}.$$

Wählt man daher die Anfangswerte $x_\nu(0)$ so, daß sie zwar absolut beliebig klein sind, daß aber $\Phi(0) - \Psi(0) > 0$ ist, so können die $|x_\nu|$ nicht sämtlich dauernd unter einer festen Schranke bleiben, womit die Instabilität bewiesen ist. Speziell für $k = n$ ist

$$\Phi(0) - \Psi(0) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha^{2\nu} |x_\nu(0)|^2,$$

---

[9]) Dazu vergleiche man die Fußnote [8]) auf Seite 135.

also bei *jeder* Wahl der Anfangswerte positiv, so daß die $|x_\nu|$ bei keiner Wahl sämtlich dauernd unter einer festen Schranke bleiben können; die Instabilität ist daher in diesem Falle vollkommen.

Satz 7. *Wenn in dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{dx_\nu}{dt} = a_{\nu 1} x_1 + \ldots + a_{\nu n} x_n + \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen φ_ν die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen und wenn von den charakteristischen Wurzeln mindestens eine einen positiven reellen Teil hat, so ist das triviale Integralsystem $x_\nu = 0$ instabil. Wenn sogar alle Wurzeln positive reelle Teile haben, ist die Instabilität vollkommen.

Beweis. Bezeichnet man die charakteristischen Wurzeln mit $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ und numeriert sie so, daß die mit positivem reellen Teil zuerst kommen, so läßt sich wie beim Beweis von Satz 5 durch die dortige Transformation (7) das Differentialgleichungssystem überführen in

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \varrho_\nu y_\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} y_\mu + \psi_\nu(y_1, \ldots, y_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

wo die Funktionen ψ_ν wieder die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen. Bezeichnet man daher die kleinste unter den positiven Zahlen $\Re(\varrho_\nu)$ mit γ und führt wie in Satz 6 die Abkürzungen

$$C = \operatorname{Max} |c_{\nu\mu}|, \qquad \alpha = \begin{cases} \operatorname{Min}\left(1, \frac{\gamma}{2(n-1)C}\right), & \text{falls } (n-1)C > 0, \\ 1, & \text{falls } (n-1)C = 0, \end{cases}$$

ein, so ist wegen der Bedingung $\mathfrak{B}$ gewiß

$$\begin{aligned} |\psi_\nu(y_1, \ldots, y_n, t)| &\leqq \frac{\gamma \alpha^{n-1}}{4n}(|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n|) \\ &\leqq \frac{\gamma}{4n}(|y_1| + \alpha |y_2| + \ldots + \alpha^{n-1} |y_n|), \end{aligned}$$

sobald nur t groß genug ist und die $|y_\nu|$ klein genug sind, also etwa für

$$t \geqq T, \qquad |y_1| \leqq \delta, \ldots, |y_n| \leqq \delta.$$

Auf das System (9) kann man daher den Satz 6 anwenden, wobei nur $t - T$ an Stelle von t zu setzen ist, und damit ist auch Satz 7 bewiesen.

§ 5.

Kriterien für bedingte Stabilität.

Satz 8. *In dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \varrho_\nu x_\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_\mu + \psi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

sei für einen gewissen Index k, der kleiner als n ist,

$$\Re(\varrho_\nu) \geqq \gamma \quad \text{für} \quad \nu \leqq k,$$
$$\Re(\varrho_\nu) \leqq -\gamma \quad \text{für} \quad \nu > k,$$

wo γ eine positive Zahl. Ferner seien die Zahlen C, α durch die Formeln

$$C = \operatorname{Max} |c_{\nu\mu}|, \qquad \alpha = \begin{cases} \operatorname{Min}\left(1, \frac{\gamma}{2(n-1)C}\right), & \text{falls} \quad (n-1)C > 0 \\ 1 \qquad\qquad\qquad\quad , & \text{falls} \quad (n-1)C = 0 \end{cases}$$

definiert. Wenn dann die Funktionen ψ_ν die Bedingung $\mathfrak{A}$ erfüllen und außerdem in dem dadurch gegebenen Bereich den Ungleichungen

$$|\psi_\nu(x_1', \ldots, x_n, t) - \psi_\nu(x_1'', \ldots, x_n'', t)| \leqq \frac{\vartheta\gamma}{2n} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{\mu-1} |x_\mu' - x_\mu''|$$

genügen, wo ϑ eine positive Konstante kleiner als 1 ist, so ist das triviale Integralsystem $x_\nu = 0$ bedingt stabil. Ist nämlich ε eine hinreichend und beliebig kleine positive Zahl und sind $c_{k+1}, \ldots, c_n$ irgendwelche Konstanten, für die

$$|c_\nu| \leqq \frac{1-\vartheta}{2} \varepsilon \alpha^{-\nu} \qquad (\nu = k+1, \ldots, n)$$

ist, so gibt es genau ein Integralsystem $x_1, \ldots, x_n$, welches für $t \geqq 0$ dauernd existiert und den Nebenbedingungen genügt:

$$x_{k+1}(0) = c_{k+1}, \ldots, x_n(0) = c_n,$$
$$|x_\nu(t)| \leqq \varepsilon \alpha^{-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Beweis. Aus den Differentialgleichungen folgt sofort:

$$x_\nu = e^{\varrho_\nu t} \int e^{-\varrho_\nu t} \Big[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_\mu + \psi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \Big] dt.$$

Dabei bestimmen sich die Integrationskonstanten eindeutig für $\nu \leqq k$ aus der Forderung, daß x_ν für $t \to \infty$ beschränkt bleiben soll, und für $\nu > k$ aus der Nebenbedingung $x_\nu(0) = c_\nu$. Hiernach ist

$$(10) \quad \begin{cases} x_\nu = e^{\varrho_\nu t} \int\limits_{\infty}^{t} e^{-\varrho_\nu t} \Big[\sum\limits_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_\mu + \psi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \Big] dt & \text{für} \quad \nu \leqq k, \\ x_\nu = e^{\varrho_\nu t} \Big\{ c_\nu + \int\limits_{0}^{t} e^{-\varrho_\nu t} \Big[\sum\limits_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_\mu + \psi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \Big] dt \Big\} & \text{für} \quad \nu > k. \end{cases}$$

Es genügt daher zu beweisen, daß dieses Integralgleichungssystem genau *ein* Lösungssystem x_ν mit den in Satz 8 behaupteten Eigenschaften hat.

Wir zeigen zuerst, daß es *höchstens ein* solches System gibt. Nehmen

wir an, es gäbe zwei, etwa x_ν' und x_ν'', so ist nach (10): $x_\nu' - x_\nu''$
$= e^{\varrho_\nu t} \int_t^t e^{-\varrho_\nu t} \Big[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu}(x_\mu' - x_\mu'') + \psi_\nu(x_1', \ldots, x_n', t) - \psi_\nu(x_1'', \ldots, x_n'', t) \Big] dt$,
wo als untere Integralgrenze ∞ für $\nu \leqq k$ und 0 für $\nu > k$ zu setzen ist. Daraus folgt, wenn man zur Abkürzung

$$\Re(\varrho_\nu) = \begin{cases} \gamma_\nu & \text{für } \nu \leqq k, \\ -\gamma_\nu & \text{für } \nu > k \end{cases} \tag{11}$$

setzt, so daß gewiß

$$\gamma_\nu \geqq \gamma > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$

ist, zunächst für $\nu \leqq k$

$$|x_\nu' - x_\nu''| \leqq e^{\gamma_\nu t} \int_t^\infty e^{-\gamma_\nu t} \Big[C \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |x_\mu' - x_\mu''| + \frac{\vartheta\gamma}{2n} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{\mu-1} |x_\mu' - x_\mu''| \Big] dt,$$

und analog auch für $\nu > k$

$$|x_\nu' - x_\nu''| \leqq e^{-\gamma_\nu t} \int_0^t e^{\gamma_\nu t} \Big[C \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |x_\mu' - x_\mu''| + \frac{\vartheta\gamma}{2n} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{\mu-1} |x_\mu' - x_\mu''| \Big] dt.$$

Bezeichnet man daher die obere Grenze der beschränkten Funktion von t

$$\sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{\mu-1} |x_\mu' - x_\mu''|$$

mit M und beachtet, daß dann wegen $\alpha \leqq 1$ auch

$$\sum_{\mu=1}^{\nu-1} |x_\mu' - x_\mu''| \leqq \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \alpha^{\mu-\nu+1} |x_\mu' - x_\mu''|$$
$$= \alpha^{2-\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \alpha^{\mu-1} |x_\mu' - x_\mu''| \begin{cases} \leqq \alpha^{2-\nu} M & \text{für } \nu > 1 \\ = 0 & \text{für } \nu = 1 \end{cases}$$

ist, so ergibt sich weiter für $\nu \leqq k$

$$|x_\nu' - x_\nu''| \leqq e^{\gamma_\nu t} \int_t^\infty e^{-\gamma_\nu t} \Big(C\alpha^{2-\nu} M + \frac{\vartheta\gamma}{2n} M \Big) dt$$
$$= \Big(C\alpha^{2-\nu} M + \frac{\vartheta\gamma}{2n} M \Big) \frac{1}{\gamma_\nu}$$
$$\leqq \Big(C\alpha^{2-\nu} M + \frac{\vartheta\gamma}{2n} \alpha^{1-\nu} M \Big) \frac{1}{\gamma} \qquad (\text{wegen } \alpha \leqq 1,\ \gamma_\nu \geqq \gamma),$$

wobei aber für $\nu = 1$ der erste Summand auf der rechten Seite wegbleiben darf. Und analog ist für $\nu > k$

$$|x_\nu' - x_\nu''| \leqq e^{-\gamma_\nu t} \int_0^t e^{\gamma_\nu t} \left(C\alpha^{2-\nu} M + \frac{\vartheta\gamma}{2n} M \right) dt$$

$$< \left(C\alpha^{2-\nu} M + \frac{\vartheta\gamma}{2n} M \right) \frac{1}{\gamma_\nu}$$

$$\leqq \left(C\alpha^{2-\nu} M + \frac{\vartheta\gamma}{2n} \alpha^{1-\nu} M \right) \frac{1}{\gamma}.$$

Daraus folgt aber nun

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha^{\nu-1} |x_\nu' - x_\nu''| < \left[(n-1) C\alpha M + \frac{\vartheta\gamma}{2} M \right] \frac{1}{\gamma}.$$

Daher ist auch

$$M \leqq \left[(n-1) C\alpha M + \frac{\vartheta\gamma}{2} M \right] \frac{1}{\gamma}.$$

Nach der Definition von α in Satz 8 ist aber $(n-1) C\alpha \leqq \frac{\gamma}{2}$, so daß sich ergibt:

$$M \leqq \frac{1+\vartheta}{2} M.$$

Hiernach ist $M = 0$, und die Lösungssysteme x_ν' und x_ν'' sind daher miteinander identisch.

Um jetzt zu zeigen, daß es auch wirklich ein Integralsystem der verlangten Art gibt, lösen wir die Integralgleichungen (10) durch sukzessive Näherungen, indem wir setzen:

$$(13) \quad \begin{cases} x_{\nu 0} = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \\ x_{\nu, \lambda+1} = e^{\varrho_\nu t} \int_\infty^t e^{-\varrho_\nu t} \left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_{\mu\lambda} + \psi_\nu(x_{1\lambda}, \ldots, x_{n\lambda}, t) \right] dt \quad \text{für } \nu \leqq k, \\ x_{\nu, \lambda+1} = e^{\varrho_\nu t} \left\{ c_\nu + \int_0^t e^{-\varrho_\nu t} \left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_{\mu\lambda} + \psi_\nu(x_{1\lambda}, \ldots, x_{n\lambda}, t) \right] dt \right\} \\ \qquad\qquad \text{für } \nu > k. \end{cases}$$

Man sieht leicht, daß die Funktionswerte von $|x_{\mu\lambda}|$ stets $\leqq \varepsilon\alpha^{-\mu}$ sind, also (wenn ε klein genug gewählt wurde) im Definitionsbereich der Funktionen ψ_ν bleiben, so daß die $x_{\nu, \lambda+1}$ wirklich sukzessive gebildet werden können. Denn jedenfalls trifft das für $\lambda = 0$ zu. Wenn es aber für einen gewissen Wert λ zutrifft, so folgt[10]) aus (13) für $\nu \leqq k$, weil dann $\Re(\varrho_\nu) = \gamma_\nu \geqq \gamma$ ist,

[10]) Dabei wird die Ungleichung

$$|\psi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t)| \leqq \frac{\vartheta\gamma}{2n} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{\mu-1} x_\mu$$

benutzt, die sogleich aus den Bedingungen von Satz 8 folgt, indem man dort $x_\mu'' = 0$ setzt.

$$|x_{\nu,\lambda+1}| \leqq e^{\gamma_\nu t}\int_t^\infty e^{-\gamma_\nu t}\left(C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\varepsilon\alpha^{-\mu}+\frac{\vartheta\gamma}{2n}\frac{n\varepsilon}{\alpha}\right)dt$$

$$=\left(C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\varepsilon\alpha^{-\mu}+\frac{\vartheta\gamma}{2n}\frac{n\varepsilon}{\alpha}\right)\frac{1}{\gamma_\nu}$$

$$\leqq\left((\nu-1)C\varepsilon\alpha^{-\nu+1}+\frac{\vartheta\gamma\varepsilon}{2\alpha}\right)\frac{1}{\gamma}$$

$$\leqq\left(\frac{\gamma\varepsilon}{2}\alpha^{-\nu}+\frac{\vartheta\gamma\varepsilon}{2}\alpha^{-\nu}\right)\frac{1}{\gamma}=\frac{1+\vartheta}{2}\varepsilon\alpha^{-\nu}<\varepsilon\alpha^{-\nu},$$

und analog für $\nu>k$, weil dann $\Re(\varrho_\nu)=-\gamma_\nu\leqq-\gamma$ ist,

$$|x_{\nu,\lambda+1}| \leqq e^{-\gamma_\nu t}\left\{|c_\nu|+\int_0^t e^{\gamma_\nu t}\left(C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\varepsilon\alpha^{-\mu}+\frac{\vartheta\gamma}{2n}\frac{n\varepsilon}{\alpha}\right)dt\right\}$$

$$<|c_\nu|+\left(C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\varepsilon\alpha^{-\mu}+\frac{\vartheta\gamma}{2n}\frac{n\varepsilon}{\alpha}\right)\frac{1}{\gamma_\nu}$$

$$\leqq\frac{1-\vartheta}{2}\varepsilon\alpha^{-\nu}+\frac{1+\vartheta}{2}\varepsilon\alpha^{-\nu}=\varepsilon\alpha^{-\nu}.$$

Die $x_{\nu\lambda}$ können also wirklich für alle λ gebildet werden. Nun zeigen wir weiter, daß

$$|x_{\nu\lambda}-x_{\nu,\lambda-1}| \leqq \varepsilon\alpha^{-\nu}\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^{\lambda-1} \tag{14}$$

ist. In der Tat gilt diese Ungleichung nach dem Bewiesenen jedenfalls für $\lambda=1$. Wenn sie aber für einen gewissen Wert λ gilt, so folgt aus (13) für $\nu\leqq k$ wegen der in Satz 8 geforderten Ungleichung für die ψ_ν:

$$|x_{\nu,\lambda+1}-x_{\nu\lambda}| \leqq e^{\gamma_\nu t}\int_t^x e^{-\gamma_\nu t}\left[C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\varepsilon\alpha^{-\mu}\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^{\lambda-1}+\frac{\vartheta\gamma}{2n}\frac{n\varepsilon}{\alpha}\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^{\lambda-1}\right]dt$$

$$=\varepsilon\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^{\lambda-1}\left(C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\alpha^{-\mu}+\frac{\vartheta\gamma}{2\alpha}\right)\frac{1}{\gamma_\nu}$$

und analog für $\nu>k$:

$$|x_{\nu,\lambda+1}-x_{\nu\lambda}| \leqq e^{-\gamma_\nu t}\int_0^t e^{\gamma_\nu t}\left[C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\varepsilon\alpha^{-\mu}\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^{\lambda-1}+\frac{\vartheta\gamma}{2n}\frac{n\varepsilon}{\alpha}\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^{\lambda-1}\right]dt$$

$$<\varepsilon\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^{\lambda-1}\left(C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\alpha^{-\mu}+\frac{\vartheta\gamma}{2\alpha}\right)\frac{1}{\gamma_\nu},$$

also zusammenfassend für alle ν, weil $\alpha \leqq 1$, $\gamma_\nu \geqq \gamma$ ist,

$$|x_{\nu,\lambda+1} - x_{\nu\lambda}| \leqq \varepsilon \left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^{\lambda-1} \left[(\nu-1) C \alpha^{1-\nu} + \frac{\vartheta\gamma}{2} \alpha^{-\nu}\right]_\gamma^1$$

$$\leqq \varepsilon \left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^{\lambda-1} \left(\frac{\gamma}{2} \alpha^{-\nu} + \frac{\vartheta\gamma}{2} \alpha^{-\nu}\right)_\gamma^1 = \varepsilon \alpha^{-\nu} \left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^{\lambda},$$

womit die Ungleichung (14) allgemein bewiesen ist.

Wegen (14) sind die Grenzwerte

$$\lim_{\lambda \to \infty} x_{\nu\lambda} = x_\nu = x_\nu(t)$$

gleichmäßig für $t \geqq 0$ vorhanden und also stetige Funktionen von t. Wegen $|x_{\nu\lambda}| \leqq \varepsilon \alpha^{-\nu}$ ist auch $|x_\nu| \leqq \varepsilon \alpha^{-\nu}$. Die Funktionen x_ν bleiben also absolut unter der in Satz 8 behaupteten Schranke. Sie genügen aber auch wirklich dem Gleichungssystem (10). Das ergibt sich leicht, indem man in (13) zur Grenze $\lambda \to \infty$ übergeht, wobei nur die Formel

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_\infty^t e^{-\varrho_\nu t} \left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_{\mu\lambda} + \psi_\nu(x_{1\lambda}, \ldots, x_{n\lambda}, t)\right] dt$$

$$= \int_\infty^t e^{-\varrho_\nu t} \left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_\mu + \psi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t)\right] dt \qquad \text{für } \nu \leqq k$$

wegen des unendlich großen Integrationsintervalles einer genaueren Begründung bedarf. Nun folgt aber aus (14) leicht

$$|x_\nu - x_{\nu\lambda}| \leqq \varepsilon \alpha^{-\nu} \left[\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^\lambda + \left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^{\lambda+1} + \left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^{\lambda+2} + \ldots\right] = \frac{2\varepsilon\alpha^{-\nu}}{1-\vartheta} \left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^\lambda.$$

Daher ist für $\nu \leqq k$

$$\left| \int_\infty^t e^{-\varrho_\nu t} \left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu}(x_{\mu\lambda} - x_\mu) + \psi'_\nu(x_{1\lambda}, \ldots, x_{n\lambda}, t) - \psi'_\nu(x_1, \ldots, x_n, t)\right] dt \right|$$

$$\leqq \int_t^\infty e^{-\gamma_\nu t} \left[C \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{2\varepsilon\alpha^{-\mu}}{1-\vartheta} \left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^\lambda + \frac{\vartheta\gamma}{2n} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{\mu-1} \frac{2\varepsilon\alpha^{-\mu}}{1-\vartheta} \left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^\lambda\right] dt.$$

Hier kann man aber den Faktor $\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)^\lambda$ vorziehen, wodurch dann sogleich die zu beweisende Limesformel hervorgeht.

Satz 9. *Wenn in dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{dx_\nu}{dt} = a_{\nu 1} x_1 + \ldots + a_{\nu n} x_n + \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen φ_ν die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, also von selbst auch $\mathfrak{B}$ erfüllen und wenn k von den charakteristischen Wurzeln einen positiven

und $n-k$ einen negativen reellen Teil haben (wobei $k \geqq 1$ und $n-k \geqq 1$ ist), so ist das triviale Integralsystem $x_\nu = 0$ bedingt stabil, und zwar bilden, wenn η eine hinreichend und beliebig kleine positive Zahl ist, diejenigen Integralsysteme x_ν, für welche dauernd $|x_\nu| \leqq \eta$ bleibt, eine Schar mit genau $n-k$ willkürlichen Konstanten.

Beweis. Bezeichnet man die charakteristischen Wurzeln wieder mit $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ und numeriert sie so, daß die mit positivem reellen Teil zuerst kommen, so läßt sich wie beim Beweis von Satz 5 durch die dortige Transformation (7) das Differentialgleichungssystem überführen in

$$(15) \qquad \frac{dy_\nu}{dt} = \varrho_\nu y_\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} y_\mu + \psi_\nu(y_1, \ldots, y_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo offenbar die Funktionen ψ_ν ebenfalls die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ erfüllen. Bezeichnet man daher die kleinste unter den Zahlen $|\Re(\varrho_\nu)|$ mit γ und führt wie in Satz 8 die Abkürzungen

$$C = \operatorname{Max} |c_{\nu\mu}|, \qquad \alpha = \begin{cases} \operatorname{Min}\left(1, \frac{\gamma}{2(n-1)C}\right), & \text{falls } (n-1)C > 0 \\ 1 \qquad\qquad\qquad\quad , & \text{falls } (n-1)C = 0 \end{cases}$$

ein, so ist wegen der Bedingung $\mathfrak{C}$ gewiß

$$|\psi_\nu(y_1', \ldots, y_n', t) - \psi_\nu(y_1'', \ldots, y_n'', t)| \leqq \frac{\gamma \alpha^{n-1}}{4n} \sum_{\mu=1}^{n} |y_\mu' - y_\mu''|$$

$$\leqq \frac{\gamma}{4n} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{\mu-1} |y_\mu' - y_\mu''|,$$

sobald nur t groß genug ist und die $|y_\mu'|$ und $|y_\mu''$ klein genug sind, also etwa für

$$t \geqq T, \quad |y_1'| \leqq \delta, \quad |y_1''| \leqq \delta, \ldots, \quad |y_n'| \leqq \delta, \quad |y_n''| \leqq \delta.$$

Auf das System (15) kann man daher den Satz 8 anwenden, wobei nur $t - T$ an Stelle von t zu setzen ist, und damit ist auch Satz 9 bewiesen.

Ein Vergleich der Sätze 5 und 9 läßt vermuten, daß in Satz 9 erst recht mindestens bedingte Stabilität vorliegen wird, wenn man von den k ersten charakteristischen Wurzeln nur verlangt, daß der reelle Teil $\geqq 0$ statt > 0 ist. Unser Existenzbeweis für die Integrale setzt aber wesentlich voraus, daß er > 0 ist, und läßt sich nicht ohne weiteres so abändern, daß er auch den Fall $\geqq 0$ erfaßt. Wir können aber diesen Fall doch nachträglich auf den behandelten zurückführen und damit folgenden Satz gewinnen:

Satz 10. *Wenn in dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{dx_\nu}{dt} = a_{\nu 1} x_1 + \ldots + a_{\nu n} x_n + \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen φ_ν die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, also von selbst auch $\mathfrak{B}$ erfüllen und wenn von den charakteristischen Wurzeln genau $n-k$ einen negativen reellen Teil haben (wobei $k \geqq 1$ und $n-k \geqq 1$ ist), so ist das triviale Integralsystem $x_\nu = 0$ mindestens bedingt stabil, und zwar bilden, wenn η eine hinreichend und beliebig kleine positive Zahl ist, diejenigen Integralsysteme x_ν, für welche dauernd $|x_\nu| \leqq \eta$ bleibt, eine Schar mit mindestens $n-k$ willkürlichen Konstanten.

Beweis. Seien wieder $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ die charakteristischen Wurzeln und sei

$$\Re(\varrho_\nu) \geqq 0 \qquad \text{für} \quad \nu \leqq k,$$
$$\Re(\varrho_\nu) < 0 \qquad \text{für} \quad \nu > k.$$

Nun wählen wir eine positive Zahl p so, daß

$$(16) \qquad \begin{cases} \Re(\varrho_\nu) + p > 0 & \text{für} \quad \nu \leqq k, \\ \Re(\varrho_\nu) + p < 0 & \text{für} \quad \nu > k \end{cases}$$

ist, und setzen $x_\nu = e^{-pt} z_\nu$. Dadurch wird das gegebene Differentialgleichungssystem in

$$(17) \qquad \frac{dz_\nu}{dt} = a_{\nu 1} z_1 + \ldots + a_{\nu n} z_n + p z_\nu + w_\nu(z_1, \ldots, z_n, t) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

transformiert, wobei

$$w_\nu(z_1, \ldots, z_n, t) = e^{pt} \varphi_\nu(e^{-pt} z_1, \ldots, e^{-pt} z_n, t)$$

ist. Offenbar erfüllen die Funktionen w_ν wiederum die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$. Die charakteristischen Wurzeln des Systems (17) sind aber $\varrho_1 + p, \ldots, \varrho_n + p$. Daher sind bei dem System (17) die Voraussetzungen von Satz 9 erfüllt, und somit gibt es eine Integralschar z_ν mit genau $n-k$ willkürlichen Konstanten so, daß dauernd $|z_\nu| \leqq \eta$ ist. Das bedeutet aber für das ursprüngliche System eine ebensolche Schar, für die sogar $|x_\nu| \leqq e^{-pt}\eta$, also erst recht $|x_\nu| \leqq \eta$ ist. Eventuell kann es natürlich noch weitere Integrale geben, für die dauernd $|x_\nu| \leqq \eta$ ist (aber nicht $|x_\nu| \leqq e^{-pt}\eta$). Damit ist Satz 10 bewiesen.

§ 6.

Asymptotisches Verhalten im allgemeinen Fall.

Satz 11. *Wenn in dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{dx_\nu}{dt} = a_{\nu 1} x_1 + \ldots + a_{\nu n} x_n + \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen φ_ν die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen und wenn die reellen Teile der charakteristischen Wurzeln $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ nicht sämtlich positiv sind, so gibt es zu jedem etwa vorhandenen Integralsystem x_ν,

für welches

$$\lim_{t\to\infty} x_1 = 0, \ldots, \lim_{t\to\infty} x_n = 0$$

ist[11]*), einen Index l derart, daß*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|x_1|+\ldots+|x_n|)}{t} = \Re(\varrho_l) \leqq 0$$

ist. — Wenn die Funktionen φ_ν außerdem die Bedingung $\mathfrak{C}$ erfüllen, so gibt es auch umgekehrt zu jedem Index l, für den $\Re(\varrho_l) < 0$ ist[12]*), wirklich Integralsysteme der vorbezeichneten Art, und zwar bilden diejenigen, für welche*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(x_1+\ldots+x_n)}{t} \leqq -r < 0$$

ist, eine Schar mit genau h willkürlichen Konstanten, wo h die Anzahl derjenigen charakteristischen Wurzeln ϱ_ν bezeichnet, für die $\Re(\varrho_\nu) \leqq -r$ ist.

Beweis des ersten Teils. Wir denken uns die charakteristischen Wurzeln ϱ_ν so numeriert, daß

$$\Re(\varrho_1) \geqq \Re(\varrho_2) \geqq \ldots \geqq \Re(\varrho_n) \tag{18}$$

ist, und transformieren dann das Differentialgleichungssystem durch die lineare Transformation (7) auf die spezielle Form

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \varrho_\nu y_\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} y_\mu + \psi_\nu(y_1, \ldots, y_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{19}$$

wo auch die Funktionen ψ_ν wieder die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen. Dann gilt natürlich die Abschätzung

$$g(|y_1|+\ldots+|y_n|) \leqq |x_1|+\ldots+|x_n| \leqq G(|y_1|+\ldots+|y_n|),$$

wo g, G zwei aus der Transformationsmatrix zu entnehmende Konstanten sind, und folglich brauchen wir nur nachzuweisen, daß zu jedem Integralsystem von (19), für welches

$$\lim_{t\to\infty} y_1 = 0, \ldots, \quad \lim_{t\to\infty} y_n = 0 \tag{20}$$

ist, ein Index l existiert derart, daß

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|y_1|+\ldots+|y_n|)}{t} = \Re(\varrho_l) \leqq 0$$

ist. Zu dem Zweck setzen wir zunächst

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|y_1|+\ldots+|y_n|)}{t} = \beta. \tag{21}$$

[11]) Falls z. B. alle reellen Teile negativ sind, hat nach Satz 5 jedes Integralsystem, dessen Anfangswerte absolut hinreichend klein sind, diese Eigenschaft.

[12]) Im allgemeinen aber nicht für $\Re(\varrho_l) = 0$.

Dann folgt aus (20) sofort:

$$\beta \leqq 0. \tag{22}$$

Ferner ergibt sich aus (19), wie schon wiederholt,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_\nu|^2 \begin{cases} \leqq \Re(\varrho_\nu)\,|y_\nu|^2 + C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}|y_\nu y_\mu| + |y_\nu \psi_\nu| \\ \geqq \Re(\varrho_\nu)\,|y_\nu|^2 - C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}|y_\nu y_\mu| - |y_\nu \psi_\nu|, \end{cases}$$

wobei $C = \operatorname{Max}|c_{\nu\mu}|$ ist. Daher ist wegen der Bedingung $\mathfrak{B}$, wenn α eine Zahl zwischen 0 und 1 ist, die beliebig klein sein darf, für genügend große t, etwa für $t \geqq T_\alpha$, weil dann nach Voraussetzung (20) zugleich die $|y_\nu|$ beliebig klein werden,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y_\nu|^2 \begin{cases} \leqq \Re(\varrho_\nu)\,|y_\nu|^2 + C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}|y_\nu y_\mu| + |y_\nu|\sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu |y_\mu| \\ \geqq \Re(\varrho_\nu)\,|y_\nu|^2 - C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}|y_\nu y_\mu| - |y_\nu|\sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu |y_\mu|. \end{cases} \tag{23}$$

Aus der oberen Ungleichung (23) ergibt sich mit Rücksicht auf (18), wenn man mit $\alpha^{2\nu}$ multipliziert und nach ν summiert,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|y_\nu|^2$$

$$\leqq \Re(\varrho_1)\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|y_\nu|^2 + C\sum_{\nu>\mu}^{1,n}\alpha^{2\nu}|y_\nu y_\mu| + \sum_{\nu-1}^{n}\alpha^{2\nu}|y_\nu|\sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu |y_\mu|.$$

Wendet man rechts die Abschätzungen (4), (5) von S. 137 an, so erhält man

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|y_\nu|^2 \leqq \left[\Re(\varrho_1) + C\,\frac{(n-1)\alpha}{2} + n\alpha\right]\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|y_\nu|^2.$$

Entsprechend ergibt sich aus der unteren Ungleichung (23)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|y_\nu|^2 \geqq \left[\Re(\varrho_n) - C\,\frac{(n-1)\alpha}{2} - n\alpha\right]\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|y_\nu|^2.$$

Die beiden letzten Ungleichungen besagen aber soviel wie

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-[2\Re(\varrho_1)+C(n-1)\alpha+2n\alpha]t}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|y_\nu|^2\right) \leqq 0 \quad \text{für } t \geqq T_\alpha, \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-[2\Re(\varrho_n)-C(n-1)\alpha-2n\alpha]t}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^{2\nu}|y_\nu|^2\right) \geqq 0 \quad \text{für } t \geqq T_\alpha. \tag{25}$$

Aus (24) folgt, daß die Funktion in der Klammer für $t \geqq T_\alpha$ monoton abnimmt; folglich ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha^{2\nu} |y_\nu|^2 \leqq K_\alpha e^{[2\Re(\varrho_1)+C(n-1)\alpha+2n\alpha]t},$$

wo K_α eine Konstante, und daraus ergibt sich

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha^{2\nu} |y_\nu|^2\right) \leqq 2\Re(\varrho_1) + C(n-1)\alpha + 2n\alpha.$$

Analog ergibt sich aus (25)

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha^{2\nu} |y_\nu|^2\right) \geqq 2\Re(\varrho_n) - C(n-1)\alpha - 2n\alpha.$$

Auf Grund der einleuchtenden Abschätzungen

$$(26) \qquad (|y_1| + \ldots + |y_n|)^2 \begin{cases} \leqq n \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu|^2 \leqq n\alpha^{-2n} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha^{2\nu} |y_\nu|^2 \\ \geqq \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu|^2 \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \alpha^{2\nu} |y_\nu|^2 \end{cases}$$

folgt aber aus den beiden letzten Ungleichungen weiter:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|y_1| + \ldots + |y_n|)}{t} \begin{cases} \leqq \Re(\varrho_1) + \frac{1}{2} C(n-1)\alpha + n\alpha \\ \geqq \Re(\varrho_n) - \frac{1}{2} C(n-1)\alpha - n\alpha. \end{cases}$$

Die linke Seite haben wir mit β bezeichnet, und da α beliebig klein sein darf, ergibt sich

$$(27) \qquad \Re(\varrho_1) \geqq \beta \geqq \Re(\varrho_n).$$

Wenn nun β nicht gleich einem $\Re(\varrho_l)$ wäre, so gäbe es wegen (27) und (18) einen Index k, für welchen

$$(28) \qquad \Re(\varrho_k) > \beta > \Re(\varrho_{k+1})$$

wäre, und wir wollen zeigen, daß das nicht sein kann. Setzt man nämlich

$$(29) \qquad \sum_{\nu=1}^{k} \alpha^{2\nu} |y_\nu|^2 = \Phi(t), \qquad \sum_{\nu=k+1}^{n} \alpha^{2\nu} |y_\nu|^2 = \Psi(t),$$

so ist wegen (26) und (21) jedenfalls

$$(30) \qquad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log[\Phi(t)+\Psi(t)]}{t} = 2\beta$$

und daher

$$\lim_{t\to\infty} e^{-2(\beta+\alpha)t}[\Phi(t)+\Psi(t)] = 0;$$

also erst recht

$$\lim_{t\to\infty} e^{-2(\beta+\alpha)t}[\Phi(t)-\Psi(t)]=0. \tag{31}$$

Anderseits folgt aus der unteren Ungleichung (23)

$$\frac{1}{2}\Phi'(t)\geqq\Re(\varrho_k)\Phi(t)-C\sum_{\nu>\mu}^{1,k}\alpha^{2\nu}|y_\nu y_\mu|-\sum_{\nu=1}^{k}\alpha^{2\nu}|y_\nu|\sum_{\mu=1}^{n}\alpha^{\mu}|y_\mu|.$$

Wenn man hier bis n summiert statt bloß bis k, so muß die entstehende Ungleichung erst recht gelten, und auf Grund der Abschätzungsformeln (4), (5) erhält man

$$\frac{1}{2}\Phi'(t)\geqq\Re(\varrho_k)\Phi(t)-\left[C\frac{(n-1)\alpha}{2}+n\alpha\right][\Phi(t)+\Psi(t)]. \tag{32}$$

Analog ergibt sich aus der oberen Ungleichung (23)

$$\frac{1}{2}\Psi'(t)\leqq\Re(\varrho_{k+1})\Psi(t)+\left[C\frac{(n-1)\alpha}{2}+n\alpha\right][\Phi(t)+\Psi(t)] \tag{33}$$

und daher durch Subtraktion

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\Phi'(t)-\Psi'(t)]\geqq{}&[\Re(\varrho_k)-C(n-1)\alpha-2n\alpha]\Phi(t)\\&-[\Re(\varrho_{k+1})+C(n-1)\alpha+2n\alpha]\Psi(t).\end{aligned}$$

Wählt man daher α so klein, daß

$$\begin{cases}\Re(\varrho_k)\quad -C(n-1)\alpha-2n\alpha>\beta+\alpha,\\ \Re(\varrho_{k+1})+C(n-1)\alpha+2n\alpha<\beta-\alpha,\end{cases} \tag{34}$$

was nach der Annahme (28) möglich ist, so erhält man

$$\frac{1}{2}[\Phi'(t)-\Psi'(t)]\geqq(\beta+\alpha)\Phi(t)-(\beta-\alpha)\Psi(t)\geqq(\beta+\alpha)[\Phi(t)-\Psi(t)],$$

oder, was dasselbe sagt,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2(\beta+\alpha)t}[\Phi(t)-\Psi(t)]\right)\geqq 0\qquad(\text{für } t\geqq T_\alpha).$$

Hiernach ist die Funktion in der Klammer monoton wachsend, und da sie nach (31) gegen Null geht, ist sie gewiß nicht positiv. Es ist also

$$\Phi(t)\leqq\Psi(t)\qquad\text{für } t\geqq T_\alpha. \tag{35}$$

Mit Rücksicht hierauf ergibt sich aber aus (33)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Psi'(t)&\leqq\Re(\varrho_{k+1})\Psi(t)+\left[C\frac{(n-1)\alpha}{2}+n\alpha\right]2\Psi(t)\\&\leqq(\beta-\alpha)\Psi(t)\qquad\qquad(\text{wegen (34)}),\end{aligned}$$

was soviel besagt wie

$$\frac{d}{dt}[e^{-2(\beta-\alpha)t}\Psi(t)]\leqq 0.$$

Nach einer schon oben bei (24) angewandten Schlußweise folgt hieraus

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log \Psi(t)}{t} \leqq 2(\beta - \alpha),$$

so daß wegen (35) auch

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log [\Phi(t) + \Psi(t)]}{t} \leqq 2(\beta - \alpha)$$

ist. Das steht aber im Widerspruch mit (30). Somit muß in der Tat β gleich einem $\Re(\varrho_l)$ sein, und zwar nach (22) gleich einem nicht positiven $\Re(\varrho_l)$.

Beweis des zweiten Teils. Wir bemerken zunächst, daß, wenn die dortige Zahl h gleich n ist, weil dann alle $\Re(\varrho_\nu)$ negativ sind, schon nach Satz 5 eine Integralschar mit n willkürlichen Konstanten existiert, für welche die x_ν nach Null wandern. Wenn $h < n$, so setzen wir

$$h = n - k, \tag{36}$$

und haben dann die Ungleichungen

$$\begin{cases} \Re(\varrho_\nu) > -r & \text{für } \nu \leqq k, \\ \Re(\varrho_\nu) \leqq -r < 0 & \text{für } \nu > k. \end{cases} \tag{37}$$

Daher gibt es eine positive Zahl p so, daß

$$p < r, \tag{38}$$

$$\begin{cases} \Re(\varrho_\nu) + p > 0 & \text{für } \nu \leqq k \\ \Re(\varrho_\nu) + p < 0 & \text{für } \nu > k \end{cases} \tag{39}$$

ist. Wendet man dann die Transformation

$$x_\nu = e^{-pt} z_\nu \tag{40}$$

an, so geht das gegebene Differentialgleichungssystem über in

$$\frac{dz_\nu}{dt} = a_{\nu 1} z_1 + \ldots + a_{\nu n} z_n + p z_\nu + w_\nu(z_1, \ldots, z_n, t), \tag{41}$$

wobei

$$w_\nu(z_1, \ldots, z_n, t) = e^{pt} \varphi_\nu(e^{-pt} z_1, \ldots, e^{-pt} z_n, t)$$

ist, so daß auch die Funktionen w_ν wieder die Bedingungen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ erfüllen. Die charakteristischen Wurzeln des Systems (41) sind

$$\varrho_1 + p, \ \ldots, \ \varrho_n + p,$$

und nach (39) haben k davon einen positiven und $n - k$ einen negativen reellen Teil.

Wenn nun

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|x_1|+\ldots+|x_n|)}{t} \leqq -r \tag{42}$$

sein soll, so ist für hinreichend kleines positives ε und $t \geqq T_\varepsilon$

$$|x_1|+\ldots+|x_n| < e^{(-r+\varepsilon)t} < e^{-(p+\varepsilon)t}.$$

Also sind vermöge (40) die z_ν beschränkt und wandern sogar nach Null. Wenn umgekehrt die z_ν beschränkt sind, so ist vermöge (40)

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|x_1|+\ldots+|x_n|)}{t} = -p + \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|z_1|+\ldots+|z_n|)}{t} \leqq -p,$$

und dann gilt nach dem bereits bewiesenen ersten Teil, weil aus $\Re(\varrho_\nu) \leqq -p$ wegen (39) und (37) stets schon $\Re(\varrho_\nu) \leqq -r$ folgt, auch die Formel (42). Nach Satz 9 hat aber das System (41) eine Integralschar mit genau $n-k$ willkürlichen Konstanten, bei welcher die $|z_\nu|$ unter einer beliebig klein vorgegebenen Schranke bleiben. Also hat das ursprüngliche System eine Integralschar mit genau $n-k$ willkürlichen Konstanten, für die die Formel (42) gilt. Nach (36) ist aber damit auch der zweite Teil von Satz 11 bewiesen.

§ 7.

Das genauere asymptotische Verhalten bei spezieller Annahme über die charakteristischen Wurzeln.

Wenn die reellen Teile der charakteristischen Wurzeln alle voneinander verschieden sind, sind die Wurzeln selbst erst recht voneinander verschieden, und daher läßt sich die Matrix B auf S. 138 so wählen, daß in (6) alle $c_{\nu\mu}$ verschwinden; wir dürfen uns daher von vornherein auf Differentialgleichungssysteme der speziellen Form

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \varrho_\nu x_\nu + q_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

beschränken. Wenn nun für ein Integralsystem x_ν und einen bestimmten Index l die Beziehungen statthaben:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{x_\nu}{x_l} = 0 & \text{für } \nu \neq l, \\ \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{x_l}\dfrac{dx_l}{dt} = \varrho_l, \end{cases} \tag{43}$$

so folgt daraus sofort

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|x_1+\ldots+x_n|)}{t} = \Re(\varrho_l). \tag{44}$$

Aber aus (44) kann nicht umgekehrt auf (43) geschlossen werden. Formeln der Gestalt (43) beschreiben daher das asymptotische Verhalten eines Integralsystems genauer als (44). Nach dieser Vorbemerkung beweisen wir jetzt

Satz 12. *Wenn in dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \varrho_\nu x_\nu + \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen φ_ν die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen und wenn die Ungleichungen gelten

$$\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2) > \ldots > \Re(\varrho_n),$$

so gibt es zu jedem etwa vorhandenen Integralsystem x_ν, für welches

$$\lim_{t\to\infty} x_1 = 0, \quad \ldots, \quad \lim_{t\to\infty} x_n = 0$$

ist[13]*, einen Index l derart, daß*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_\nu}{x_l} = 0 \quad \text{für} \quad \nu \neq l,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{x_l}\frac{dx_l}{dt} = \varrho_l, \qquad \Re(\varrho_l) \leqq 0$$

ist. — Wenn die Funktionen φ_ν außerdem die Bedingung $\mathfrak{C}$ erfüllen, so gibt es auch umgekehrt zu jedem Index l, für den $\Re(\varrho_l) < 0$ ist[14]*, wirklich Integralsysteme der vorbezeichneten Art, und zwar bilden diejenigen, für welche $l \geqq j$ ist, eine Schar mit genau $n - j + 1$ willkürlichen Konstanten.*

Beweis des ersten Teils. Nach Satz 11 gibt es jedenfalls für jedes in Frage stehende Integralsystem einen Index l so, daß

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|x_1| + \ldots + |x_n|)}{t} = \Re(\varrho_l) \leqq 0$$

ist. Daraus folgt sofort

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)}{t} = 2\,\Re(\varrho_l). \tag{45}$$

Wir wählen nun eine feste positive Zahl c so, daß

$$\Re(\varrho_\nu) - c > \Re(\varrho_{\nu+1}) + c \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{46}$$

ist. Da die Funktionen φ_ν die Bedingung $\mathfrak{B}$ erfüllen, ist, wenn ε eine Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet, die beliebig klein sein darf, für $t \geqq T_\varepsilon$,

---

[13]) Vgl. Fußnote [11]), Seite 149.
[14]) Vgl. Fußnote [12]), Seite 149.

weil dann nach Voraussetzung auch die $|x_\nu|$ beliebig klein werden,

$$\varphi_\nu| \leqq \frac{c\varepsilon}{2n}(|x_1| + \ldots + |x_n|),$$

also auch

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu \varphi_\nu| \leqq \frac{c\varepsilon}{2n}(|x_1| + \ldots + |x_n|)^2 \leqq \frac{c\varepsilon}{2}\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^2. \tag{47}$$

Nun setzen wir zunächst $l > 1$ voraus und setzen zur Abkürzung

$$\sum_{\nu=1}^{l-1} |x_\nu|^2 = \Phi(t), \qquad \sum_{\nu=l}^{n} |x_\nu|^2 = \Psi(t).$$

Dann folgt aus den gegebenen Differentialgleichungen nach einem schon oft angewandten Rezept für $t \geqq T_\varepsilon$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\Phi(t) - \varepsilon\Psi(t)] &\geqq \Re(\varrho_{l-1})\,\Phi(t) - \varepsilon\Re(\varrho_l)\,\Psi(t) - \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu \varphi_\nu| \\ &\geqq \Re(\varrho_{l-1})\,\Phi(t) - \varepsilon\Re(\varrho_l)\,\Psi(t) - \frac{c\varepsilon}{2}[\Phi(t) + \Psi(t)] \\ &\geqq \left[\Re(\varrho_{l-1}) - \frac{c}{2}\right]\Phi(t) - \left[\Re(\varrho_l) + \frac{c}{2}\right]\varepsilon\Psi(t),\end{aligned}$$

und daher mit Rücksicht auf (46) erst recht

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\Phi(t) - \varepsilon\Psi(t)] \geqq [\Re(\varrho_{l-1}) - c][\Phi(t) - \varepsilon\Psi(t)].$$

Nach einem schon häufig angewandten Schluß ist also die Funktion

$$e^{-2[\Re(\varrho_{l-1})-c]t}[\Phi(t) - \varepsilon\Psi(t)] \tag{48}$$

für $t \geqq T_\varepsilon$ monoton wachsend. Wäre sie einmal positiv, so würde mit Rücksicht auf (46) die Funktion

$$e^{-2[\Re(\varrho_l)+c]t}[\Phi(t) - \varepsilon\Psi(t)]$$

und um so mehr die Funktion

$$e^{-2[\Re(\varrho_l)+c]t}[\Phi(t) + \Psi(t)]$$

über alle Grenzen wachsen, was aber der Formel (45) widerspricht. Daher wird die Funktion (48) für $t \geqq T_\varepsilon$ niemals positiv, und folglich ist

$$\Phi(t) \leqq \varepsilon\Psi(t) \quad \text{für} \quad t \geqq T_\varepsilon.$$

Da ε beliebig klein sein darf und da $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ nach Satz 2 nie beide verschwinden können, so besagt das

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)} = 0,$$

oder also:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|x_1|^2+\ldots+|x_{l-1}|^2}{|x_l|^2+\ldots+|x_n|^2}=0, \quad \text{falls} \quad l>1. \tag{49}$$

Nunmehr lassen wir die Voraussetzung $l>1$ wieder fallen, setzen aber $l<n$ voraus. Setzen wir dann zur Abkürzung

$$\sum_{\nu=l+1}^{n}|x_\nu|^2=\Omega(t),$$

so ergibt sich aus den gegebenen Differentialgleichungen mit Rücksicht auf (47) für $t\geqq T_\varepsilon$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\varepsilon|x_l|^2-\Omega(t)]\geqq\varepsilon\Re(\varrho_l)|x_l|^2-\Re(\varrho_{l+1})\Omega(t)-\frac{c\varepsilon}{2}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2$$

und daher unter Berücksichtigung von (49) für $t\geqq T'_\varepsilon\geqq T_\varepsilon$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\varepsilon|x_l|^2-\Omega(t)]&\geqq\varepsilon\Re(\varrho_l)|x_l|^2-\Re(\varrho_{l+1})\Omega(t)-c\varepsilon[|x_l|^2+\Omega(t)]\\&\geqq[\Re(\varrho_l)-c]\varepsilon|x_l|^2-[\Re(\varrho_{l+1})+c]\Omega(t).\end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf (46) folgt hieraus weiter

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\varepsilon|x_l|^2-\Omega(t)]\geqq[\Re(\varrho_l)-c][\varepsilon|x_l|^2-\Omega(t)] \quad \text{für} \quad t\geqq T'_\varepsilon.$$

Daher ist die Funktion

$$e^{-2[\Re(\varrho_l)-c]t}[\varepsilon|x_l|^2-\Omega(t)] \tag{50}$$

für $t\geqq T'_\varepsilon$ monoton wachsend. Hätte sie einen endlichen Grenzwert, so wäre das erst recht der Fall, wenn ε durch $\frac{\varepsilon}{2}$ ersetzt wird; daher hätten auch die Funktionen

$$e^{-2[\Re(\varrho_l)-c]t}|x_l|^2, \qquad e^{-2[\Re(\varrho_l)-c]t}\Omega(t)$$

endliche Grenzwerte, und mit Rücksicht auf (49) wäre auch

$$e^{-2[\Re(\varrho_l)-c]t}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2$$

beschränkt. Das widerspricht aber der Formel (45), und folglich wächst die Funktion (50) über alle Grenzen; sie muß also von einer gewissen Stelle an positiv sein, etwa für $t\geqq T''_\varepsilon$. Dann ist

$$\varepsilon|x_l|^2>\Omega(t) \quad \text{für} \quad t\geqq T''_\varepsilon,$$

und da ε beliebig klein sein darf, besagt das soviel wie

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|x_{l+1}|^2+\ldots+|x_n|^2}{|x_l|^2}=0, \quad \text{falls} \quad l<n. \tag{51}$$

Nunmehr lassen wir auch die Voraussetzung $l<n$ wieder fallen. Jedenfalls folgt aus (49) und (51) zusammen, gleichgültig welchen Wert

der Index l haben mag,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_\nu}{x_l}=0 \quad \text{für} \quad \nu\neq l. \tag{52}$$

Aus der l-ten Differentialgleichung selbst ergibt sich dann wegen der Bedingung $\mathfrak{B}$ auch

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{x_l}\frac{dx_l}{dt}=\varrho_l+\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi_l(x_1,\ldots,x_n,t)}{|x_1|+\ldots+|x_n|}\cdot\frac{|x_1|+\ldots+|x_n|}{x_l}=\varrho_l.$$

Beweis des zweiten Teils. Nach Satz 11 gibt es für $\Re(\varrho_j)<0$ eine Integralschar mit genau $n-j+1$ willkürlichen Konstanten, für die

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log(|x_1|+\ldots+|x_n|)}{t}=\Re(\varrho_l) \quad \text{mit} \quad l\geqq j$$

ist. Für diese ist aber nach dem bewiesenen ersten Teil auch

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_\nu}{x_l}=0 \quad \text{für} \quad \nu\neq l,$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{x_l}\frac{dx_l}{dt}=\varrho_l,$$

und damit ist der zweite Teil bereits bewiesen.

§ 8.

Anwendung auf lineare Differentialgleichungen.

Um zu zeigen, daß auch die am Schluß der Einleitung erwähnten Sätze über lineare Differentialgleichungen unter die gegenwärtigen Betrachtungen fallen, will ich hier zwei solche Sätze beweisen. Satz 13 ist mir seit langem bekannt, ohne daß ich ihn bis jetzt veröffentlicht hätte; Satz 14 deckt sich mit dem Satz 3 einer früheren Arbeit[15]), aus dem damals alles Weitere gefolgert wurde.

Satz 13. *In dem linearen Differentialgleichungssystem*

$$\frac{dx_\nu}{dt}=\sum_{\mu=1}^{n}[a_{\nu\mu}+\varphi_{\nu\mu}(t)]\,x_\mu \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

mögen die Funktionen $\varphi_{\nu\mu}(t)$ für $t\geqq 0$ stetig sein und für $t\to\infty$ gegen Null streben. Sind dann $r_1,\ldots,r_m$ die voneinander verschiedenen reellen Teile der Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12}\ldots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn}-\varrho\end{vmatrix}=0$$

[15]) Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist I. Journal für die reine und angewandte Mathematik **142** (1913), S. 254–270.

und ist allgemein e_λ die Anzahl der Wurzeln mit dem reellen Teil r_λ, wobei mehrfache Wurzeln ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt sind, so gibt es n linear unabhängige Integralsysteme, die derart in m Klassen zerfallen, daß allgemein für die Integrale der λ-ten Klasse und ihre linearen Verbindungen die Beziehung

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|x_1|+\ldots+|x_n|)}{t} = r_\lambda$$

statthat. Die Anzahl der Integralsysteme der λ-ten Klasse ist dabei gleich e_λ.

Beim Beweis dürfen und wollen wir voraussetzen, daß alle r_λ negativ sind. Denn das kann durch die Transformation $x_\nu = e^{pt} z_\nu$ sofort erreicht werden; man braucht nur p größer zu wählen als alle r_λ. Die Funktionen

$$\sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\nu\mu}(t)\, x_\mu$$

erfüllen offenbar die Bedingungen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. Damit erweist sich aber Satz 13 als eine leichte Folge von Satz 11. Denn wenn die r_λ etwa der Größe nach geordnet werden:

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_m,$$

so gibt es nach Satz 11 zunächst genau e_m linear unabhängige Integralsysteme derart, daß für sie und ihre linearen Verbindungen

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|x_1|+\ldots+|x_n|)}{t} = r_m$$

ist; sodann genau $e_m + e_{m-1}$ linear unabhängige Integralsysteme, für die

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|x_1|+\ldots+|x_n|)}{t} = r_m \quad \text{oder} \quad r_{m-1}$$

ist. Da aber nur für e_m unabhängige der Wert r_m in Frage kommt, so gibt es noch e_{m-1} linear unabhängige Integralsysteme derart, daß für sie und ihre linearen Verbindungen

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log(|x_1|+\ldots+|x_n|)}{t} = r_{m-1}$$

ist. So kann man weiterschließen.

Satz 14. *In dem linearen Differentialgleichungssystem*

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \varrho_\nu x_\nu + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\nu\mu}(t)\, x_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

mögen die Konstanten ϱ_ν den Bedingungen genügen

$$\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2) > \ldots > \Re(\varrho_n),$$

während die Funktionen $\varphi_{\nu\mu}(t)$ *für* $t \geqq 0$ *stetig sein und für* $t \to \infty$ *gegen Null streben mögen. Dann gibt es* n *linear unabhängige Integralsysteme*

$$x_1 = x_{1l},\ x_2 = x_{2l},\ \ldots,\ x_n = x_{nl} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n),$$

für welche die Beziehungen gelten

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{\nu l}}{x_{ll}} = 0 \quad \text{für} \quad \nu \neq l,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{x_{ll}} \frac{dx_{ll}}{dt} = \varrho_l.$$

Beim Beweis nehmen wir erlaubterweise wieder an, daß alle $\Re(\varrho_\nu)$ negativ sind. Dann ist aber Satz 14 eine leichte Folge von Satz 12. Denn nach diesem gibt es zunächst genau ein Integralsystem, für welches die Beziehungen von Satz 14 mit $l = n$ gelten. Sodann gibt es genau zwei linear unabhängige Integralsysteme, für welche die Beziehungen mit $l = n$ oder $n - 1$ gelten; man kann also auch eines angeben, für welches die Beziehungen mit $l = n - 1$ gelten. So läßt sich weiterschließen.

(Eingegangen am 3. Mai 1928.)

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Struktur der Materie
in Einzeldarstellungen

Herausgegeben von

Dr. M. Born und **Dr. J. Franck**

Professor, Direktor des Instituts für theoret. Physik der Universität Göttingen

Professor, Direktor des zweiten physikal. Instituts der Universität Göttingen

Soeben erschien Band VII:

Graphische Darstellung der Spektren von Atomen und Ionen mit ein, zwei und drei Valenzelektronen

Von

Dr. W. Grotrian

a. o. Professor der Universität Berlin, Observator am Astrophys. Observatorium in Potsdam

Erster Teil: Textband. Mit 43 Abbildungen. XIII, 245 Seiten. 1928

Zweiter Teil: Figurenband. Mit 163 Abbildungen. X, 168 Seiten. 1928

RM 34.—; gebunden RM 36.40

Inhaltsübersicht:

Erstes Kapitel: Einleitung.
Zweites Kapitel: Die Spektren der Atome und Ionen mit einem einzigen Elektron.
Drittes Kapitel: Die Spektren der Atome und Ionen mit einem Valenzelektron.
Viertes Kapitel: Die Spektren der Atome und Ionen mit zwei Valenzelektronen.
Fünftes Kapitel: Die Spektren der Atome und Ionen mit drei Valenzelektronen.
Sechstes Kapitel: Die wahren Hauptquantenzahlen „n" und ihr Zusammenhang mit dem periodischen System der Elemente.
Siebentes Kapitel: Die Röntgenspektren.
Achtes Kapitel: Die Größe und Frequenzdifferenz der optischen Terme.
Neuntes Kapitel: Die anomalen Terme.
Zehntes Kapitel: Die serienlosen Spektren einiger Ionen mit zwei Valenzelektronen.

Die früher erschienenen Bände:

I. Zeemaneffekt und Multiplettstruktur der Spektrallinien. Von Dr. **E. Back,** Privatdozent für Experimentalphysik in Tübingen, und Dr. **A. Landé,** a. o. Professor für Theoretische Physik in Tübingen. Mit 25 Textabbildungen und 2 Tafeln. XII, 213 Seiten. 1925. RM 14.40; gebunden RM 15.90

II. Vorlesungen über Atommechanik. Von Dr. **Max Born,** Professor an der Universität Göttingen. Herausgegeben unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Hund, Privatdozent an der Universität Göttingen. Erster Band. Mit 43 Abbildungen. IX, 358 Seiten. 1925. RM 15.—; gebunden RM 16.50

III. Anregung von Quantensprüngen durch Stöße. Von Dr. **J. Franck,** Professor an der Universität Göttingen, und Dr. **P. Jordan,** Assistent am Physikalischen Institut Göttingen. Mit 51 Abbildungen. VIII, 312 Seiten. 1926. RM 19.50; gebunden RM 21.—

IV. Linienspektren und periodisches System der Elemente. Von Dr. **Friedrich Hund,** Privatdozent an der Universität Göttingen. Mit 43 Abbildungen und 2 Zahlentafeln. VI, 221 Seiten. 1927. RM 15.—; gebunden RM 16.20

V. Die seltenen Erden vom Standpunkte des Atombaues. Von Professor Dr. **Georg v. Hevesy,** Vorstand des Physikalisch-chemischen Institutes der Universität Freiburg i. Br. Mit 15 Abbildungen. VIII, 140 Seiten. 1927. RM 9.—; gebunden RM 10.20

VI. Fluorescenz und Phosphorescenz im Lichte der neueren Atomtheorie. Von **Peter Pringsheim,** Berlin. Dritte Auflage. Mit 87 Abbildungen. VII, 357 Seiten. 1928. RM 24.—; gebunden RM 25.20

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik veröffentlichen wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Steward, G. C., The symmetrical optical systems. Gr.-8°, VIII u. 102 S. Cambridge, University Press, 1928. (Cambridge Tracts Nr. 25.)

Malsch, F., Grundriß der darstellenden Geometrie. Gr.-8°, 113 S. Leipzig, Verlag von Quelle & Meyer, 1928.

Baur, F., Korrelationsrechnung. Kl.-8°, VI u. 57 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1928. (Math.-phys. Bibliothek, herausgegeben von W. Lietzmann u. A. Witting, Nr. 75.)

Bieberbach, L., Differential- und Integralrechnung. Band II: Integralrechnung. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Gr.-8°, VI u. 149 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1928. (Teubners Mathematische Leitfäden, Band 5.)

Memoirs of the College of Science. Kyoto Imperial University. Series A. Vol. VI, No. 3, May 1928. Gr.-8°, 119—203 S. Kyoto.

Bieberbach, L., Vorlesungen über Algebra. Unter Benutzung der dritten Auflage des gleichnamigen Werkes von † Dr. G. Bauer. Gr.-8°, X u. 334 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1928.

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN WIEN I

Soeben erschien:

Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems

Von **Dr.-Ing. Karl Federhofer**

o. Professor an der Technischen Hochschule Graz

Mit 48 Abbildungen im Text und auf 5 Tafeln. 89 Seiten. RM 9.90

In diesem Buche wird zum erstenmal der Versuch unternommen, die Kinematik und Kinetostatik des räumlichen Systems, die bisher auf analytischem Wege entwickelt worden ist, rein zeichnerisch darzustellen, wie dies bei der ebenen Systembewegung schon längst üblich war. Der Verfasser bedient sich hierbei eines von Mayor und Mises stammenden Abbildungsverfahrens, das bereits in der Raumkraftstatik erfolgreiche Anwendungen gefunden hat und sowohl die einfache Konstruktion der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei der räumlichen Bewegung, wie auch jene der Drücke in den Führungen zwangläufig bewegter gestattet. Die entwickelten Verfahren bilden die Grundlage für die zeichnende Kinematik räumlicher Getriebe.

Inhaltsübersicht:

I. Darstellung der Raumvektoren: Abbildungsverfahren nach B. Mayor und R. v. Mises. Abbildungsverfahren II, Konstruktion des Momentes eines Vektors für einen beliebigen Drehpunkt A.
II. Die momentane Schraubenbewegung: Geschwindigkeitszustand, Beschleunigungszustand.
III. Graphische Kinematik des zwangläufigen räumlichen Systems: Arten des Zwanglaufes. Die räumliche Zweipunktführung. Die Dreipunktführung. Die Vierpunktführung. Die Fünfpunktführung.
IV. Graphische Kinetostatik des zwangläufigen starren räumlichen Systems: Die Zweipunktführung. Die Dreipunktführung.
V. Die sphärische Bewegung.
VI. Die zwangläufige sphärische Bewegung. Tafel I—V.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.